

ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ РАКЕТНО-КОСМІЧНОГО МАШИНОБУДУВАННЯ
ДНІПРОВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ імені ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЛЕКЦІЙНИХ ЗАНЯТЬ

дисципліна «Дискретна математика»

спеціальність 123 Компютерна інженерія

освітньо-професійна програма Обслуговування комп'ютерних систем і мереж

Дніпро

2023

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Поняття множини. Способи задання множини. Операції над множинами та їх властивості.

Мета заняття сформувати уявлення про множини, способи задання множин і їх позначення; формувати вміння задавати і описувати множини

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 7-11	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

4 Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали лекції

Весь світ навколо нас це множина речей (об'єктів, предметів) і явищ. Людина здатна виголошувати звуки. Впорядкована множина звуків утворює слово. Впорядкована множина слів утворює фразу або речення. Множина речень утворює мову.

Ми вживаємо поняття впорядкована множина в тому розумінні, що між людьми, носіями даної мови, існує домовленість щодо об'єктів або явищ, які співвідносяться з тим чи іншим набором звуків. Тільки після цього набір звуків становиться словом. Це ж саме можна сказати про речення – множина слів становиться закінченою думкою тільки в тому випадку, коли слова підібрані у відповідність з ситуацією і розташовані у певному порядку – в противному разі це просто абракадабра. Нарешті, щоб виголосити промову, яка може вразити слухачів своєю мудрістю, треба не тільки підібрати потрібну множину речень, а й впорядкувати їх найкращим чином.

Комп'ютер це множина мільйонів транзисторів, об'єднаних в логічні порти (слова). Логічні порти об'єднуються в логічні схеми (шифтер, декодер, суматор і ін. – речення). Організуючи логічні схеми в потрібному порядку інженери створюють штучний інтелект, машину для зберігання, обробки і пересилки інформації, власне комп'ютер. З таким складним завданням не можна впоратися без попереднього математичного моделювання всіх процесів, пов'язаних з обробкою інформації.

Математика вивчає поняття абстрактні, об'єкти ідеалізовані, які в природі не існують, такі як точка, пряма, площа, число, змінна, рівняння, функція і т. і. В основі математики знаходяться примітивні поняття, настільки прості і очевидні, що не потребують пояснення. Примітивні відношення між примітивними поняттями називаються аксіомами. Наприклад, існує точка, що належить даній прямій і існує точка, що не належить цій прямій; існує пряма, і до того ж лише одна, що проходить через дві різні точки; існує площа, що проходить через три точки, які не належать одній прямій.

Вибір аксіом залежить від самих математиків, але роблять вони це таким чином, щоб аксіоми або відповідали справжнім відношенням між реальними об'єктами або щоб теорія, розвинута на основі цих аксіом, була б корисна для людства.

Вважається, що поняття множини і одиниці (елемента множини) відомі людям з практики і не потребують визначення через поняття ще простіші. В ХХ столітті поняття множини було покладено в основу математики, так що все в математиці може бути визначено або описано в термінах множини. Творцем теорії множин був Georg Cantor (1845 - 1918). Не всі математики в той час зрозуміли важливість цієї теорії і до самої своєї смерті Georg Cantor працював професором в одному провінційному університеті Німеччини, не признаний своїми колегами. Причиною цього явилися відкриті трохи пізніше парадокси цієї теорії. Про природу цих парадоксів можна говорити тільки після того, як добре вивчити саму теорію. Дякуючи другому великому німецькому математику David Hilbert (1862 - 1943), теорія множин на кінець була признана як основа сучасної математики. David Hilbert приклав багато зусиль для того, щоб математика набула того вигляду, який ми бачимо зараз.

Теорія множин відома в математиці під назвою наївної теорії множин. В інтуїтивній теорії множин поняття «множина» первинне і неозначене, тобто його не можна означити через інші простіші терміни чи об'єкти, а можна тільки пояснити на прикладах, апелюючи до нашої уяви й інтуїції. **Множина** – це зібрання в єдине ціле певних об'єктів, чітко розрізнявальних нашою інтуїцією. Інші синоніми основного слова множина – сукупність, набір, колекція, об'єднання.

Об'єкти, які утворюють множину, називаються елементами множини. Про множину кажуть, що вона містить ці елементи. Якщо об'єкт a є елементом множини A – то позначається так $a \in A$, якщо a не належить множині A – то $a \notin A$.

Позначатимемо множини великими літерами $A, B, C, \dots$ і елементи множини малими літерами $a, b, c, \dots$, таким чином

$$A = \{ a, b, c, \dots \}$$

Якщо елемент a належить множині A , пишуть $a \in A$. Якщо елемент a не належить множині A , пишуть $a \notin A$. Множина може бути задана перерахуванням або списком всіх її елементів, наприклад $A = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \}$.

Інший метод полягає в задаванні предикату $P(x)$, при підстановці в який елементів множини одержимо істинні пропозиції. В загальному вигляді це позначається так:

$$A = \{x : P(x)\}$$

Таким чином, остання множина A може бути представлена як

$$A = \{x: x \text{ є просте число, } x < 20\}.$$

Серед множин, найбільш вживаних в математиці є множина цілих додатних чисел

$$\mathbf{N} = \{ 1, 2, 3, \dots, n, \dots \},$$

які ще називаються натуральними числами. Цю назву вони дістали тому, що були відомі людям з найдавніших часів. Як говорив відомий німецький математик *Leonard Kronecker*: *Господь створив натуральні числа. Все інше в математиці є творінням людей.*

Часто 0 вважають також натуральним числом, хоча для цього немає ніяких підстав. На відміну від натуральних чисел, число 0 появилось порівняно недавно. Щоб уникнути непорозумінь, цю множину треба позначати як

$$\mathbf{N}^0 = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots \}.$$

Другими часто вживаними множинами в математиці є множина цілих чисел

$$\mathbf{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

і множина раціональних чисел

$$Q = \left\{ x : x = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbf{Z}, \quad q \in \mathbf{N} \right\}$$

Зверніть увагу на спосіб задання останньої множини. Так робиться завжди, коли характерна властивість елементів множини може бути виражена у вигляді формули. Ще один приклад цього методу

$$A = \{ x : x = 2n, n \in \mathbf{N} \},$$

що задає множину парних натуральних чисел.

Підсумовуючи сказане, виділяємо наступні методи задавання множин:

- по списку – в програмуванні це називають `enumerated data type` і використовують символ **enum**;
- за допомогою предикату.

Нехай множина задана за допомогою предикату $A = \{x \mid P(x)\}$ і не існує жодного елементу x при підстановці якого в предикат одержали б істинну пропозицію. Така множина називається **порожньою** і позначається $\emptyset$. Наприклад,

$$\emptyset = \{ x \in \mathbf{R} : e^x = -1 \}, \text{ де } \mathbf{R} \text{ є множина дійсних чисел.}$$

У конкретній математичній теорії буває зручно вважати, що всі розглядувані множини є підмножинами деякої фіксованої множини, яку називають **універсальною множиною** або **універсумом** і позначають через E (або U). Наприклад, в елементарній алгебрі такою універсальною множиною можна вважати множину дійсних чисел $\mathbf{R}$, у

вищій алгебрі - множину комплексних чисел C , в арифметиці - множину цілих чисел Z , в традиційній планіметрії - множину всіх точок площини або множину всіх геометричних об'єктів, тобто множину множин точок на площині тощо. Дві множини A та B називаються *рівними*, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів. У цьому випадку пишуть $A=B$.

Множина A називається *підмножиною* множини B , якщо кожний елемент множини A є в множині B і позначається $A \subset B$.

Скінченна множина – це така множина, для якої існує натуральне число, яке є кількістю її елементів. Множина, яка не є скінченною, називається нескінченною. Якщо множина скінченна, то кількість її елементів позначається через $|A|$ і називається *потужністю*.

Операції над множинами

Нехай A і B деякі множини.

а) **Об'єднанням** множин A і B (позначається $A \cup B$) називається множина тих елементів, які належать хоча б одній з множин A чи B . Символічно операція об'єднання множин записується так

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ або } x \in B \} \text{ або } x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \in B. \end{cases}$$

Приклад. $\{a,b,c\} \cup \{a,c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$.

б) **Перетином** множин A і B (позначається $A \cap B$) називається множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать множинам A і B одночасно. Тобто

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ і } x \in B \} \text{ або } x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \in B. \end{cases}$$

Приклад. $\{a,b,c\} \cap \{a,c,d,e\} = \{a,c\}$, $\{a,b,c\} \cap \{d,e\} = \emptyset$.

Кажуть, що множини A і B **не перетинаються**, якщо $A \cap B = \emptyset$.

Операції об'єднання та перетину множин можуть бути поширені на випадок довільної сукупності множин $\{A_i \mid i \in I\}$. Так об'єднання множин A_i (записується $\bigcup_{i \in I} A_i$)

складається з тих елементів, які належать хоча б одній з множин A_i даної сукупності. А перетин множин A (записується $\bigcap_{i \in I} A_i$) містить тільки ті елементи, які одночасно

належать кожній з множин A_i .

в). **Різницею** множин A і B (записується $A \setminus B$) називається множина тих елементів, які належать множині A і не належать множині B . Отже,

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ і } x \notin B \} \text{ або } x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \notin B. \end{cases}$$

Приклад. $\{a,b,c\} \setminus \{a,d,c\} = \{b\}$,

$\{a,c,d,e\} \setminus \{a,b,c\} = \{d,e\}$,

$\{a,b\} \setminus \{a,b,c,d\} = \emptyset$.

г) **Симетричною різницею** множин A і B (записується $A \Delta B$, $A \oplus B$ або $A \div B$) називається множина, що складається з усіх елементів множини A , які не містяться в B , а також усіх елементів множини B , які не містяться в A . Тобто

$$A \Delta B = \{ x \mid (x \in A \text{ і } x \notin B) \text{ або } (x \in B \text{ і } x \notin A) \} \text{ або } x \in A \Delta B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \notin B, \\ x \in B, \\ x \notin A. \end{cases}$$

Приклад. $\{a,b,c\} \Delta \{a,c,d,e\} = \{b,d,e\},$
 $\{a,b\} \Delta \{a,b\} = \emptyset.$

Введені теоретико-множинні операції можна проілюструвати діаграмою (рис.1). Тут множини A і B - це множини точок двох кругів.

Тоді $A \cup B$ - складається з точок областей **I, II, III**,

$A \cap B$ - це область **II**,

$A \setminus B$ - область **I**,

$B \setminus A$ - область **III**,

$A \Delta B$ - області **I і III**.

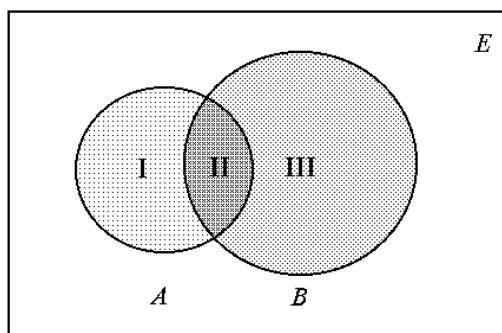


Рис. 1.

Якщо зафіксована універсальна множина E , то **доповненням** множини A (яке є підмножиною універсальної множини E) - записується $\bar{A}$ - називається множина всіх елементів універсальної множини, які не належать множині A .

Тобто

$$\bar{A} = \{ x \mid x \in E \text{ і } x \notin A \} \text{ або } x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A.$$

Неважко помітити, що $\bar{\bar{A}} = E \setminus A$.

Приклад. Якщо за універсальну множину прийняти множину N всіх натуральних чисел, то доповненням $\bar{P}$ множини P всіх парних натуральних чисел буде множина всіх непарних натуральних чисел.

Зазначимо у вигляді тотожностей властивості введених вище теоретико-множинних операцій.

1	Закони комутативності	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
---	-----------------------	--

2	Закони асоціативності	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
3	Закони дистрибутивності	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4	Закон подвійного доповнення	$\overline{\overline{A}} = A$
5	Закон ідемпотентності	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
6	Закони де Моргана	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
7	Закони поглинання	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
8	Закони тотожності	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$
9	Закони домінування	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup U = U$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції

Дати означення множини.

Які існують способи задання множин?

Яка множина називається скінченною, нескінченною?

Яка множина називається порожньою і як позначається?

Які існують теоретико-множинні операції?

Що називається діаграмою Ейлера-Венна?

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Відношення, їх властивості та види

Мета заняття Сформувати уявлення про відношення; розвинути уміння визначати види відношень і їх властивостей

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН
опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с.42-48	5 хв	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу

Література

4 Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали лекції

Поняття відношень між множинами відносяться до числа фундаментальних понять математики. І не тільки тому, що воно лежить в основі визначення таких важливих понять математики, як функції і відображення, але й тому, що в будь-якій науці вивчаються не тільки самі об'єкти, але і зв'язки між ними.

Розглянемо бінарне відношення, тобто відношення між двома елементами однієї або різних множин.

Спочатку розглянемо приклад бінарного відношення між елементами двох множин А і В.

$A = \{\text{Сашко, Борис, Володя, Галя, Таня, Оленка}\}$

$B = \{\text{футбол, волейбол, плавання, гімнастика, теніс}\}$

За допомогою слів „займатися яким-небудь видом спорту” між елементами цих множин встановлено зв'язок, або, як говорять в математиці, відношення. В результаті ми одержали третю множину Р

$R = \{(Сашко, волейбол), (Сашко, теніс), (Борис, футбол), (Володя, плавання), (Галя, волейбол), (Оленка, теніс)\}$

Наведений приклад показує, що будь-яке бінарне відношення (відповідність) між елементами множин A і B повністю характеризується трьома множинами: A , B і R – множиною пар, що є підмножиною $A \times B$.

$$R \subset A \times B$$

Відношенням (бінарним відношенням) із множини A в множину B називається деяка множина R впорядкованих пар, у якій перший елемент пари належить множині A , а другий – множині B і позначається $R = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Які впорядковані пари утворюють відношення $R = \{(a, b) | a \text{ ділить } b\}$? Очевидно, що $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.

Якщо буквою P позначити відношення із A в B , то відповідність P : „учень $x \in A$ займається видом спорту $y \in B$ залишається: xPy ”.

У математиці досить часто доводиться мати справу з тими чи іншими відношеннями між певними об’єктами.

Найважливіші з них мають певні назви і позначення:

відношення рівності ($=$); відношення перпендикулярності ($\perp$); відношення паралельності ($\parallel$); відношення подільності ($\overline{||}$); відношення включення ($\subset$); відношення конгруентності ($\cong$); відношення подібності ($\sim$).

Бінарне відношення можна задати сукупністю впорядкованих пар, стрілочним і графічним способами.

Стрілочний спосіб полягає в тому, що множини A і B зображають колами, їх елементи точками. Потім з’єднують стрілками елементи кожної пари (x, y) , які належать графіку P заданого відношення. В результаті одержимо фігуру, яку називають графіком розглядуваного відношення P .

При *графічному* зображенні відношення P на площині ставимо точки, які відповідають парам (x, y) , що належать відношенню P . Множина цих точок і буде графіком даного відношення.

Властивості бінарних відношень

Відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(a, a) \in R$.

Рефлексивним є, наприклад, такі відношення рівності ($=$), не більше ($\leq$), подільності ($\overline{||}$), рівносильності висловлювань ($\Leftrightarrow$), паралельності ($\parallel$), конгруентності ($\cong$) та подібності ($\sim$).

Відношення R на множині A називається *іррефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(a, a) \notin A$.

Відношення R на множині A називається *симетричним*, якщо для будь-яких $a, b \in A$ виконується умов: з того, що $(a, b) \in R$ випливає, що $(b, a) \in R$.

Симетричними є відношення рівності ($=$), рівносильності ($\equiv$), перпендикулярності ($\perp$), конгруентності ($\cong$), подібності ($\sim$).

Відношення R на множині A називається *антисиметричним*, якщо для будь-яких $a, b \in A$ виконується умов: з того, що $(a, b) \in R$ та $(b, a) \in R$, випливає, що $a = b$, тобто якщо в разі $a \neq b$ воно не містить пар (a, b) і (b, a) одночасно і не містить пар виду (a, a) .

Відношення R на множині A називається *асиметричним*, якщо для всіх $a, b \in A$ виконується умова: з того що $(a, b) \in R$ випливає, що $(b, a) \notin R$

Асиметричними є відношення більше ($>$), менше ($<$), не більше ($\leq$), включення ($\subset$).

Відношення R на множині A називається *транзитивним*, для будь-яких $a, b, c \in A$ виконується умова: з того, що $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$ випливає, що $(a, c) \in R$.

Транзитивним є відношення менше ($<$), не більше ($\leq$), подільності ($:$), рівносильності ($\equiv$), конгруентності ($\cong$), паралельності ($\parallel$), подібності ($\sim$).

Антитранзитивним відношенням називається таке відношення, для якого для будь-яких трьох елементів x, y, z з множини A із $x R y$ і $y R z$ випливає $\overline{x R z}$.

Антитранзитивними є відношення перпендикулярності ($\perp$).

Відношення між елементами множин можуть мати одну, дві, три або не володіти ні однією властивістю.

Наприклад, відношення перпендикулярності в множині прямих є симетричним, але не має рефлексивної і транзитивної властивостей, відношення p „число x більше числа y ” у множині натуральних чисел є транзитивним, але не володіє властивостями рефлексивності і симетричності.

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Визначити вид кожного відношення

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$$

$$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$$

$$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$

$$R_6 = \{(3, 4)\}$$

Розв'язання.

- Відношення R_3 і R_5 – рефлексивні, бо містять пари $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$;
- відношення R_2 і R_3 – симетричні;
- відношення R_4, R_5, R_6 – антисиметричні;
- відношення R_4, R_5, R_6 – транзитивні;
- відношення R_4, R_6 – іррефлексивні;
- відношення R_1, R_2 – не рефлексивні і не іррефлексивні.

Якщо відношення рефлексивне, то на головній діагоналі матриці відношення є лише одиниці, якщо рефлексивне – то нулі.

Матриця симетричного відношення – симетрична.

Матриця антисиметричного відношення має таку властивість: якщо $i \neq j$, то з $m_{ij} = 1$ випливає $m_{ji} = 0$.

Граф рефлексивного відношення має петлю в кожній вершині.

Граф транзитивного відношення в разі наявності пари дуг (a, b) та (b, c) обов'язково є дуга (a, c) .

Граф антисиметричного відношення не містить пар вершин з ребрами, які протилежно напрямлені до різних вершин.

Відношення на множині A називається *відношенням еквівалентності*, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне. Два елементи множини A , які зв'язані відношенням еквівалентності, називаються *еквівалентними*.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції

Що називається відношення?

Яке відношення називається рефлексивним?

Яке відношення називається симетричним?

Яке відношення називається антисиметричним?

Яке відношення називається асиметричним?

Яке відношення називається транзитивним?

Яке відношення називається іррефлексивним?

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Операції над відношеннями

Мета заняття Сформувати уявлення про операції над відношеннями: перетин, об'єднання, різниця, композиція відношень

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с.274-276	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст]/ Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

Навчальні матеріали лекції

Будемо вважати, що всі відношення із множини A і множину B , які розглядаються, є підмножинами декартового добутку $A \times B$. Для довільних відношень A та B можна побудувати нові відношення, які отримуються за допомогою теоретико – множинних операцій.

1 Операція об'єднання відношень

2 Операція перетину відношень

3 Операція різниця відношень

4 Операція композиція відношень

Теоретико – множинні операції визначаються таким чином:

1) *Об'єднанням відношень A та B називається відношення, яка складається з усіх пар елементів, які належать хоча б одному з відношень A чи B , тобто*

$$R(A \cup B) = \{(a, b) | (a, b) \in A \text{ або } (a, b) \in B\}$$

2) *Перетином відношень* A та B називається відношення, яка складається тільки з тих пар елементів, які належать і відношенню A і відношенню B , тобто

$$R(A \cap B) = \{(a, b) | ((a, b) \in A) \text{ і } ((a, b) \in B)\}$$

3) *Різницею відношень* A та B називається відношення, яка складається тільки з тих пар елементів відношення A , які не належать відношенню B , тобто

$$R(A \setminus B) = \{(a, b) | ((a, b) \in A), ((a, b) \notin B)\}$$

4) *Композицією відношень* R та S називається відношення, яке складається із всіх можливих упорядкованих пар (a, c) , де $a \in A, c \in C$ і для яких існує елемент $b \in B$ такий, що $(a, b) \in R, (b, c) \in S$ і позначається $R \circ S$.

Будь яке відношення з A в B має *обернене відношення* R^{-1} з B в A , що визначається як

$$R^{-1} = \{(b, a) | \text{BRA: } (a, b) \in R\}$$

Другими словами, обернене відношення R^{-1} складається з пар, для яких пари, одержані переміною порядку елементів, належать R .

Теорема. Нехай R - транзитивне відношення на множині A . Тоді $R^n \subset R, n = 1, 2, 3, \dots$

Приклади

1. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$ і $B = \{a, b\}$. Тоді, $R = \{(1, a), (1, b), (3, a)\} \in$ відношення A в B .
Обернене відношення $R^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (a, 3)\}$.

2. Нехай $W = \{a, b, c\}$. $R = \{(a, b), (a, c), (c, c), (c, b)\} \in$ бінарне відношення в W .
Обернене відношення $R^{-1} = \{(b, a), (c, a), (c, c), (b, c)\}$.

3. $R = \{(1, 5), (4, 5), (1, 4), (4, 6), (3, 7), (7, 6)\}$. $\text{Dom } R = \{1, 3, 4, 7\}$; $\text{Im } R = \{4, 5, 6, 7\}$; $R^{-1} = \{(5, 1), (5, 4), (4, 1), (6, 4), (7, 3), (6, 7)\}$.

4. $R = \{(x, y) : (x, y \in \mathbb{N}) \wedge (2x + y = 10)\}$.

$$R = \{(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)\}; \quad R^{-1} = \{(8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4)\}$$

5. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$ та $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Визначимо операції над відношеннями $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ і $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ з A в B :

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$$

$$R_1 \setminus R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_2 \setminus R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$$

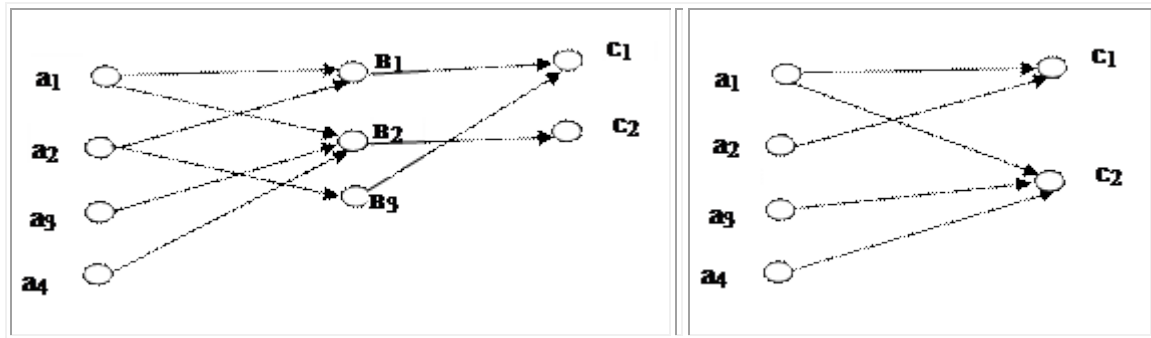
6. Якщо R – «бути сином», тоді $R \circ R$ – «бути онуком».

7. Нехай задано $R_1 \subseteq N \times N$, $R_2 \subseteq N \times N$, де N – множина натуральних чисел, причому $R_1 = \{(a, b) : b = a^2, a \in N\}$ та $R_2 = \{(b, c) : c = 3 * b, b \in N\}$, тоді $R_1 \circ R_2 = \{(a, c) : c = 3a^2, a \in R\}$.

8. Також доцільно використовувати графи для завдання композиції відношень:

$$R_1 = \{(a, b), a \in A, b \in B\}, \quad R_2 = \{(b, c), b \in B, c \in C\}, \quad \text{тоді}$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c), a \in A, c \in C\}$$



9. Знайдемо композицію відношень R та S , де R відношення із множини $A = \{1, 2, 3\}$ в множину $B = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\};$$

S -відношення із множини B в множину $C = \{0, 1, 2\}$:

$$S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

Композицію $S \circ R$ будують, використовуючи всі впорядковані з R та з S такі, що другий елемент пари з R збігається з першим елементом пари з S . Тоді отримаємо

$$S \circ R = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$$

10. Нехай на множині $A = \{1, 2, 3\}$ задано відношення $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$. Знайдемо $R^n, n = 2, 3, 4, 5$. За означенням послідовно отримаємо

$$R^2 = R \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$$

$$R^3 = R^2 \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

$$R^4 = R^3 \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

$$R^5 = R^4 \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

11. Задано множини $A = \{a, b, c\}, B = \{3, 4\}, C = \{d, e, f\}$

Знайти:

а) $A \times B \times C$;

б) $(A \times B \times C)^{-1} = C \times B \times A$;

в) $(A \times B) \times C$.

Розв'язання

а) $A \times B \times C = \{(a, 3, d), (a, 3, e), (a, 3, f), (a, 4, d), (a, 4, e), (a, 4, f), (b, 3, d), (b, 3, e), (b, 3, f), (b, 4, d), (b, 4, e), (b, 4, f), (c, 3, d), (c, 3, e), (c, 3, f), (c, 4, d), (c, 4, e), (c, 4, f)\}$;

б) $(A \times B \times C)^{-1} = \{(d, 3, a), (e, 3, a), (f, 3, a), (d, 4, a), (a, 4, a), (f, 4, a), (d, 3, b), (e, 3, b), (f, 3, b), (d, 4, b), (e, 4, b), (f, 4, b), (d, 3, c), (e, 3, c), (f, 3, c), (d, 4, c), (e, 4, c), (f, 4, c)\}$;

в) $(A \times B) \times C = \{(a, 3), (a, 4), (b, 3), (b, 4), (c, 3), (c, 4)\} \times C = \{((a, 3), d), ((a, 3), e), ((a, 3), f), ((a, 4), d), ((a, 4), e), ((a, 4), f), ((b, 3), d), ((b, 3), e), ((b, 3), f), ((b, 4), d), ((b, 4), e), ((b, 4), f), ((c, 3), d), ((c, 3), e), ((c, 3), f), ((c, 4), d), ((c, 4), e), ((c, 4), f)\}$.

12. На множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення

$$R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}.$$

Треба:

а) побудувати матрицю та графік відношення R ;

б) побудувати відношення $R^2 \cap R^{-1}$;

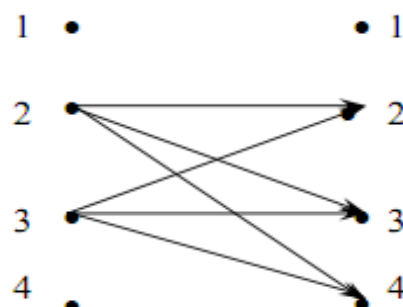
в) побудувати переріз відношення R за елементом 2;

Розв'язання

а) Таблиця відношення R має вигляд

R	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	1	1	1
3	0	1	1	1
4	0	0	0	0

Схематичне зображення відношення R є



б) Знайдемо відношення $R^2 = R \circ R$. Оскільки $R^2 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$, то $R^2 = R$.

Знайдемо відношення R^{-1}

$$R^{-1} = \{(2, 2), (3, 2), (4, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\},$$

тому

$$R^2 \cap R^{-1} = \{(2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\}.$$

в) $R(2) = \{2, 3, 4\}$.

г) Оскільки $(1, 1) \notin R$, то відношення R – не є рефлексивне.

Відношення R є транзитивним, так як з $a_1 R a_2$ та $a_2 R a_3$ випливає $a_1 R a_3$.

Відношення R не буде симетричним, оскільки з $a_1 R a_2$ не випливає $a_2 R a_1$, тобто $R \neq R^{-1}$.

Відношення R не є асиметричним і не є антисиметричним, оскільки не виконуються відповідно умови $R \cap R^{-1} = \emptyset$ та $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$, де Δ_A – діагональ множини A .

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для актуалізації опорних знань та перевірки попереднього матеріалу

Яке відношення називається рефлексивним, іррефлексивним?

Яке відношення називається симетричним, антисиметричним, асиметричним?

Яке відношення називається транзитивним?

Яке відношення називається відношенням еквівалентності?

Яке відношення називається відношенням часткового порядку?

Яке відношення називається відношенням строго порядку?

2. Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції

Операція об'єднання відношень. Операція перетину відношень.

Операція різниці відношень. Операція композиція відношень

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Елементарні булеві функції. Основні тотожності алгебри булевих функцій.

Мета заняття Сформулювати уявлення про двоелементну множину – булеву функцію і визначити всі її елементи і види.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 240-246	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

4 Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали лекції

У найрізноманітніших галузях людської діяльності досить часто виникають об'єкти, явища, процеси чи ситуації, які характеризуються двома якісно різними станами або значеннями. Приклади таких альтернативних станів у техніці: «замкнено-розімкнено», «заряджено-незаряджено», «збуджено-спокійно», «працює-непрацює», «є сигнал- немає сигналу» тощо. Аналогічні пари значень у логіці: істинно-хибно, такні, в алгебрі: еквівалентно-нееквівалентно, рівносильно-нерівносильно, тощо. При моделювання таких об'єктів в математиці одного з альтернативних станів позначають 1, а другий – 0.

Комп'ютерні обчислення природно розглядати як деякі інформаційні перетворення, на вхід яких подаються ланцюжки бітів, які перетворюються відповідно до тієї чи іншої формули. Однією з простих моделей комп'ютерних обчислень є комбінаційна схема, яка складається з більш простих обчислювальних елементів. Важливою рисою

комбінаційних схем є те, що вони не мають внутрішньої пам'яті. Відповідно до цього, перетворення, яке реалізується комбінаційною схемою, розглядається як деяка логічна, або булева, функція, яка, в свою чергу, складається з більш простих булевих функцій.

Булевою називають функцію $f(x_1, \dots, x_n)$, область значень якої складається з 0 та 1, і яка залежить від змінних $x_1, \dots, x_n$, що приймають також лише ці два значення.

Множину всіх булевих функцій позначають P_2 .

Булеву функцію від n змінних називають n -місною. Областю її визначення є множина E_2^n усіх можливих n -місних наборів (векторів) значень змінних. Ці набори називають *двійковими наборами*, або просто *наборами*. Область визначення n -місної булевої функції є скінченною і складається з 2^n наборів значень змінних. Для набору $(a_1, \dots, a_n)$ використовують позначення $\tilde{a}^n$ або $\tilde{a}$.

Нормою набору $\tilde{a}^n$ називають число $\|\tilde{a}^n\| = \sum_{i=1}^n a_i$, що дорівнює кількості його одиничних компонент.

Віддаллю Хеммінга між наборами $\tilde{a}^n$ та $\tilde{b}^n$ називають число

$$\rho(\tilde{a}^n, \tilde{b}^n) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|,$$

що дорівнює кількості компонент, у яких набори $\tilde{a}^n$ та $\tilde{b}^n$ різняться. Набори $\tilde{a}^n$ та $\tilde{b}^n$ називають *сусідніми*, якщо $\rho(\tilde{a}^n, \tilde{b}^n) = 1$ і *протилежними*, якщо $\rho(\tilde{a}^n, \tilde{b}^n) = n$. Сусідні набори відрізняються в одній компоненті, а протилежні - в усіх n компонентах.

Теорема. n -місних булевих функцій існує стільки, скільки існує наборів довжини 2^n з 0 та 1.

Множину наборів значень змінних, на яких булева функція $f(x_1, \dots, x_n)$ приймає значення 1, позначають $N_f = \{\tilde{a}^n \in E_2^n, f(\tilde{a}^n) = 1\}$.

Змінну x_i функції $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ називають *істотною*, якщо існує такий набір $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ значень решти змінних, що, $f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Змінна x_i функції $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ *неістотна* (фіктивна), якщо $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ для довільних значень решти змінних. Тобто зміна значення x_i в довільному наборі значень $x_1, \dots, x_n$ не змінює значення функції.

У цьому випадку функція $f(x_1, \dots, x_n)$ по суті залежить від $(n-1)$ змінної, тобто, є функцією $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. У такому разі кажуть, що функція g отримана із функції f *вилученням фіктивної змінної*, а функція f отримана із g *уведенням фіктивної змінної*.

Функції f та g називають *рівними*, якщо функцію g можна отримати з f шляхом введення або вилучення фіктивних змінних.

Функції, які називають елементарними:

- 1) $F_1(x) = 0$ - константа 0.
- 2) $F_2(x) = 1$ - константа 1.

3) $F_3(x)$ -х - тотожна функція.

4) $F_4(x) = \neg x$ - заперечення х, читають “не х”.

5) $f_5(x_1, x_2) = x_1 x_2$ - кон’юнкція, читають “ x_1 і x_2 ”. Іноді для кон’юнкції використовують символи $\wedge$ та $\&$.

6) $f_6(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ - диз’юнкція, читають “х, або x_2 ”.

7) $f_7(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$ - імплікація, читають “із де, впливає x_2 ”.

8) $f_8(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$ - еквівалентність. Для її позначення використовують також символ $=$.

9) $F_9(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ - додавання за mod2, читають як альтернативне “або” (“або ..., або”)

10) $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 | x_2$ - штрих Шеффера.

11) $f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ -стрілка Пірса.

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$x_1 x_2$ кон’юнкція	$x_1 \vee x_2$ диз’юнкція	$x_1 \rightarrow x_2$ імплікація	$x_1 \sim x_2$ еквівалентність	$x_1 \oplus x_2$ додавання за mod2	$x_1 x_2$ штрих Шеффера	$x_1 \downarrow x_2$ стрілка Пірса
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

Функцію, що одержана з $f_1, \dots, f_m$ деякою підстановкою їх одна в одну й перейменуванням змінних, називають *суперпозицією* $f_1, \dots, f_m$. Вираз, який описує суперпозицію та містить функціональні символи, круглі дужки та символи змінних, називають *формулою*.

Формулу, яка містить лише змінні, дужки й символи функцій із множини Q , називають *формулою над Q* .

З метою зменшення кількості дужок у формулах вводять пріоритет операцій:

- 1) заперечення;
- 2) кон’юнкція;
- 3) усі інші операції.

Символ заперечення відіграє роль дужок, якщо він є над частиною формули.

На відміну від табличного, зображення функції формулою не єдине. Формули називають *еквівалентними* або *рівносильними*, якщо вони реалізують рівні булеві функції. Еквівалентність формул позначають символом $=$.

Множину P_2 всіх булевих функцій разом з уведеною на ній системою операцій називають *алгеброю булевих функцій*.

Алгебру $(P_2; \neg, \vee, \wedge)$ з операціями заперечення, кон’юнкції та диз’юнкції називають *алгеброю Буля*, а алгебру $(P_2; \wedge, \oplus)$ з операціями кон’юнкції та додавання за mod2 –

алгеброю Жегалкіна. Формули цих алгебр будують зі знаків операцій, круглих дужок, букв $x, y, z, \dots$ і констант 0 та 1.

Знак кон'юнкції $\wedge$ у формулах обох алгебр зазвичай не пишуть. Якщо немає дужок, пріорітет операцій у булевій алгебрі такий: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція.

В алгебрі Жегалкіна спочатку використовується кон'юнкція, а потім - додавання за mod2. За наявності дужок спочатку виконуються операції всередині їх. У булевій алгебрі як дужки в разі заперечення виразів використовують сам символ заперечення.

Основні еквівалентності в алгебрах називаються *законами* відповідної алгебри.

Закони алгебри Буля

Назва закону	Формулювання закону
1. Закони асоціативності	$(xy)z = x(yz) = xyz$ $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$
2. Закони комутативності	$xy = yx$ $x \vee y = y \vee x$
3. Дистрибутивний закон для кон'юнкції щодо диз'юнкції	$(x \vee y) \vee z = xz \vee yz$
4. Дистрибутивний закон диз'юнкції щодо для кон'юнкції	$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$
5. Закон подвійного заперечення	$\bar{\bar{x}} = x$
6. Закони де Моргана	$\overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y}$ $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$
7. Закони ідемпотентності	$xx = x$ $x \vee x = x$
8. Закони поглинання	$x \vee xy = x$ $x(x \vee y) = x$
9. Співвідношення для констант	$\bar{1} = 0 \qquad \bar{0} = 1$ $1x = x \qquad 0x = 0$ $1 \vee x = 1 \qquad 0 \vee x = x$
10. Закон виключення третього	$x \vee \bar{x} = 1$
11. Закон протиріччя	$x\bar{x} = 0$

Закони алгебри Жегалкіна

Назва закону	Формулювання закону
1. Закони асоціативності	$(xy)z = x(yz) = xyz$ $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ $\qquad \qquad \qquad = x \oplus y \oplus z$
2. Закони комутативності	$xy = yx$ $x \oplus y = y \oplus x$
3. Дистрибутивний закон для кон'юнкції щодо додавання за mod2	$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$
4. Співвідношення для констант	$1x = x \qquad 0x = 0$ $x \oplus 0 = x$
5. Закон ідемпотентності для кон'юнкції	$xx = x$
6. Закон зведення подібних членів у разі додавання за mod2	$x \oplus x = 0$

Закони алгебри Буля та Жегалкіна дають змогу доводити нові еквівалентності вже без таблиць на основі тотожних перетворень.

Еквівалентності, які дозволяють перетворити будь-яку формулу булевої алгебри у рівносильну їй формулу алгебри Жегалкіна та навпаки мають вигляд:

$$\bar{x} = 1 \oplus x;$$

$$x \vee y = x \oplus y \oplus xy;$$

$$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}.$$

Функцію $f^*(x_1, \dots, x_n)$ називають **двоїстою** до функції $f(x_1, \dots, x_n)$, якщо $f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$.

Пару двоїстих функцій складають, наприклад, кон'юнкція та диз'юнкція. Таблицю для двоїстої функції у разі вибраного порядку наборів отримують із таблиці для функції $f(x_1, \dots, x_n)$, інвертуванням (тобто заміною 0 на 1 і 1 на 0) стовпчика функції і перевертанням цього стовпчика.

Для довільної функції двоїсту функцію визначають однозначно. Функція, яка є двоїстою до самої себе називається *самодвоїстою*.

Принципи двоїстості в алгебрі Буля. Якщо у формулі F , яка реалізує функцію f , усі кон'юнкції замінити на диз'юнкції, усі диз'юнкції замінити на кон'юнкції, 1 замінити на 0, 0 на 1, то отримана формула F^* реалізує функцію f^* , двоїсту до f .

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції

Що називається булевою функцією?

Які змінні називаються істотними, які фіктивними?

Які елементарні булеві функції ви знаєте?

Які функції називаються рівними?

Що таке формула?

Яка алгебра називається алгеброю Буля?

Яка алгебра називається алгеброю Жегалкіна?

Основні закони алгебри Буля, Жегалкіна.

Яка функція називається двоїстою?

Принцип двоїстості в алгебрі Буля.

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Спеціальні форми зображення булевих функцій

Мета заняття Ознойомитись з спецвіальними формами забраження булевих функцій – ДДНФ та ДКНФ

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с.339-344	5	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст]/ Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

Навчальні матеріали лекції

Спеціальними формами зображення булевих функцій в алгебрі Буля є диз'юнктивні нормальні форми та кон'юнктивні нормальні форми, а в алгебрі Жегалкіна – поліном Жегалкіна.

Диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ)

На множині змінних $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ введемо $x^\sigma = \begin{cases} \bar{x}, & \text{якщо } \sigma = 0 \\ x, & \text{якщо } \sigma = 1 \end{cases}$

Елементарною кон'юнкцією називають формулу $k = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_r}^{\sigma_r}$, де x_{ij} змінні з множини X , причому всі x_{ij} різні.

Число r називають *рангом кон'юнкції*. У разі $r=0$ кон'юнкцію називають *порожньою* і вважають рівною 1.

Елементарну кон'юнкцію, яка містить усі змінні з множини X називають *конституентою одиниці*. Конституанта одиниці – це елементарна кон'юнкція рангу n .

Диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ) називають диз'юнкцію $D = k_1 \vee k_2 \vee \dots \vee k_s$ елементарних кон'юнкцій k_j , у якій k_j ($j = 1, 2, \dots, s$) попарно різні.

Алгоритм перетворення формули булевої алгебри в рівносильну їй ДНФ:

1. формулу перетворюють у рівносильну зі змінними та їх запереченнями за допомогою лише кон'юнкції та диз'юнкції;

2. розкривши дужки, досягають, щоб кон'юнкції виконувалися раніше диз'юнкцій, виключають нулі, об'єднують рівні члени.

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ) називають ДНФ, у якій кожна елементарна кон'юнкція k_j ($j = 1, 2, \dots, s$) є конституентою одиниці.

Будь-яку булеву функцію можна єдиним способом зобразити в ДДНФ.

Для заданої таблично функції ДДНФ будують так: для кожного набору, на якому функція приймає значення 1, будують відповідно цьому набору конституенту 1, диз'юнкція всіх конституент 1 і є ДДНФ заданої функції.

Будь-яку ДНФ можна звести до ДДНФ розщепленням кон'юнкцій, які містять не всі змінні: якщо кон'юнкція k_j не містить змінної x , то

$$k_j = k_j(x_i \vee \bar{x}_i) = k_j x_i \vee k_j \bar{x}_i.$$

Приклад 1. Звести формулу $\overline{x \vee z}(x \rightarrow y)$ до ДНФ.

Використаємо формули перетворень – закони де Моргана, дистрибутивний закон для кон'юнкції відносно диз'юнкції, закони ідемпотентності:

$$\overline{x \vee z}(x \rightarrow y) = \overline{x \vee z}(\bar{x} \vee y) = \bar{x}\bar{z}(\bar{x} \vee y) = \bar{x}\bar{x} \vee \bar{x}\bar{z}y = \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}.$$

Приклад 2. Перетворити диз'юнктивну нормальну форму $\bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$ у досконалу.

Застосовуючи розщеплення для кон'юнкції $\bar{x}\bar{z}$ і закон ідемпотентності для диз'юнкції, одержимо

$$\bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} = \bar{x}(y \vee \bar{y})\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

Кон'юнктивна нормальна форма (КНФ)

Елементарною диз'юнкцією називають вираз $d = (x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\sigma_r})$, у якому всі x_{i_j} різні.

Число r називають рангом диз'юнкції. У разі $r=0$ диз'юнкцію називають *порожньою* і вважають рівною 0.

Кон'юнктивною нормальною формою (КНФ) називають кон'юнкцію $d_1 \wedge d_2 \wedge \dots \wedge d_s$ елементарних диз'юнкцій d_j ($j=1, 2, \dots, s$), у якій всі d_j різні.

Елементарну диз'юнкцію рангу n називають *конституентою нуля*. Конституента нуля - це елементарна диз'юнкція, у яку входять всі змінні з множини X .

Кожному двійковому набору $\tilde{b}^n = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ взаємно однозначно відповідає конституента нуля $x_1^{\bar{b}_1} \vee x_2^{\bar{b}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{b}_n}$, яка перетворюється на ньому в 0. Усі інші конституенти нуля на цьому наборі перетворюються в 1.

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) називають КНФ, у якій кожна елементарна диз'юнкція d_j ($j=1, 2, \dots, s$) є конституентою нуля.

Кожну булеву функцію $f(x_1, \dots, x_n) \neq 1$ можна зобразити ДКНФ.

Будь-яку КНФ можна звести до ДКНФ. Якщо в деяку елементарну диз'юнкцію d не входить змінна x , то записують рівносильний вираз

$$d \vee x\bar{x} = (d \vee x)(d \vee \bar{x}).$$

Приклад 3. Знайти КНФ для формули $\overline{x \vee z}(x \rightarrow y)$.

Використовуючи формули перетворень, одержимо

$$\overline{x \vee z}(x \rightarrow y) = \overline{x \vee z}(\bar{x} \vee y) = \bar{x}\bar{z}(\bar{x} \vee y).$$

Приклад 4. Перетворити КНФ $(\bar{x} \vee y)(y \vee \bar{z})$ у досконалу КНФ.

Використовуючи розщеплення диз'юнкцій, можемо записати

$$\begin{aligned} (\bar{x} \vee y)(y \vee \bar{z}) &= (\bar{x} \vee y \vee z\bar{z})(x\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) = \\ &= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) = \\ &= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z}). \end{aligned}$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

- 1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції
 - Що є спеціальними формами зображення булевих функцій в алгебрі Буля?
 - Як побудувати ДДНФ?
 - Як побудувати ДКНФ?
 - Як перейти від нормальної форми до досконалої?

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Поліном Жегалкіна

Мета заняття Ознайомитись з поняттям полінома Жегалкіна, та методами його побудови

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [2], с.109-114	5	Включає в себе: узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу

Література

2 Матвієнко М.П. Дискретна математика: початковий посібник [Текст] / М.П. Матвієнко – К. «Дискретна математика», 2014 – 348 с.

Навчальні матеріали лекції

Елементарну кон'юнкцію називають монотонною, якщо вона не містить заперечень змінних.

Формулу

$$P(\tilde{x}^n) = k_1 \oplus k_2 \oplus \dots \oplus k_s,$$

де $k_1, k_2, \dots, k_s$ - попарно різні монотонні кон'юнкції змінних із множини $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, називають **поліномом Жегалкіна**.

Тобто **поліном Жегалкіна** - це скінченна сума за модулем 2 попарно різних елементарних кон'юнкцій над множиною змінних $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Кількість змінних, що входять до елементарної кон'юнкції називається **рангом** елементарної кон'юнкції. Найбільший із рангів елементарних кон'юнкцій, що входять у

поліном, називають *степенем полінома*. Кількість попарно різних елементарних кон'юнкцій у поліномі називається *довжиною полінома*.

Теорема. Будь-яку булеву функцію можна єдиним способом зобразити у формі полінома Жегалкіна.

Для цього достатньо розкрити дужки (дистрибутивний закон) і виконати всі можливі спрощення з використанням законів дій з константами, ідемпотентності і зведення подібних доданків.

Методи побудови полінома Жегалкіна.

1. *Метод невизначених коефіцієнтів.* Для функції $f(x_1, \dots, x_n)$ записують найбільш загальний вигляд полінома Жегалкіна $P(x_1, \dots, x_n)$ з невизначеними коефіцієнтами (цих коефіцієнтів 2^n). Для кожного двійкового набору $a_1, \dots, a_n$ значень змінних записують рівняння $f(a_1, \dots, a_n) = P(a_1, \dots, a_n)$. Одержують систему 2^n рівнянь. Розв'язком цієї системи є коефіцієнти полінома $P(x_1, \dots, x_n)$.

Загальний вигляд полінома від двох змінних з невизначеними коефіцієнтами такий:

$$P(x, y) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 xy.$$

Загальний вигляд полінома від трьох змінних з невизначеними коефіцієнтами такий:

$$P(x, y, z) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 z \oplus c_4 xy \oplus c_5 yz \oplus c_6 xz \oplus c_7 xyz.$$

2. *Побудова полінома Жегалкіна на основі тотожних перетворень.* Спочатку будуємо рівносильну формулу, в якій є лише операції кон'юнкції та заперечення, а потім замінюємо всюди $\bar{x}$ на $1 \oplus x$. Після цього тривіальними перетвореннями одержуємо поліном.

3. *Побудова полінома Жегалкіна за досконалою ДНФ булевої функції.* Такий метод доцільно застосовувати, коли функція задана досконалою ДНФ, або якщо цю форму легко знайти.

Поліном Жегалкіна має властивість, зручну для знаходження істотних змінних булевої функції – булева функція має істотними всі змінні, які входять у її поліном Жегалкіна.

Булева функція називається *лінійною*, якщо її поліном Жегалкіна не містить кон'юнкцій змінних. Заперечення - лінійна функція, оскільки її поліном Жегалкіна $x \oplus 1$ не містить кон'юнкцій змінних. Диз'юнкція - нелінійна функція, оскільки її поліном Жегалкіна $x \oplus y \oplus xy$ містить кон'юнкцію змінних x і y . Імплікація є нелінійною функцією, а еквівалентність - функція лінійна.

Приклади розв'язування задач

1. Зобразити поліномом Жегалкіна логічні функції імплікацію ($\rightarrow$) і еквівалентність ($\sim$).

Запишемо ДДНФ даних функцій, потім виразимо операції диз'юнкції та заперечення через операції кон'юнкції.

$$\begin{aligned} x \rightarrow y &= \bar{x}y = (x \oplus 1)y = (x \oplus 1)y \oplus (x \oplus 1) \oplus y = \\ &= xy \oplus y \oplus x \oplus 1 \oplus y = xy \oplus x \oplus 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \sim y &= xy \oplus \bar{x}\bar{y} = xy \oplus \bar{x}\bar{y} \oplus xy \oplus \bar{x}\bar{y} = xy \oplus \bar{x}\bar{y} = \\ &= xy \oplus (x \oplus 1)(y \oplus 1) = xy \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1 = x \oplus y \oplus 1. \end{aligned}$$

2. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $f(x, y) = x \rightarrow y$ на основі тотожних перетворень.

Використовуючи тотожності одержимо
 $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y = \bar{x}\bar{y} = 1 \oplus x(1 \oplus y) = 1 \oplus x \oplus xy.$

3. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $f(x, y) = x \sim y$ методом невизначених коефіцієнтів.

Загальний вигляд полінома від двох змінних з невизначеними коефіцієнтами такий:

$$P(x, y) = c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y \oplus c_3 xy.$$

Прирівнюємо значення функції і полінома на всіх чотирьох наборах значень змінних і одержимо систему рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів

$$f(0,0) = 1 = c_0,$$

$$f(0,1) = 1 = c_0 \oplus c_2,$$

$$f(1,0) = 1 = c_0 \oplus c_1,$$

$$f(1,1) = 1 = c_0 \oplus c_1 \oplus c_2 \oplus c_3.$$

Звідси визначаємо $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0$. Отже, $x \sim y = 1 \oplus x \oplus y$.

4. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $f(x, y, z) = (10101011)$ методом невизначених коефіцієнтів.

Загальний вигляд полінома від трьох змінних з невизначеними коефіцієнтами такий:

$$P(x, y, z) = c_0 \oplus c_1 z \oplus c_2 y \oplus c_3 x \oplus c_4 yz \oplus c_5 xz \oplus c_6 xy \oplus c_7 xyz.$$

Тоді

$$f(0,0,0) = 1 = c_0$$

$$f(0,0,1) = 0 = c_1 \oplus c_0$$

$$f(0,1,0) = 1 = c_2 \oplus c_0$$

$$f(0,1,1) = 0 = c_4 \oplus c_2 \oplus c_1 \oplus c_0$$

$$f(1,0,0) = 1 = c_3 \oplus c_0$$

$$f(1,0,1) = 0 = c_5 \oplus c_3 \oplus c_1 \oplus c_0$$

$$f(1,1,0) = 1 = c_6 \oplus c_3 \oplus c_2 \oplus c_0$$

$$f(1,1,1) = 1 = c_7 \oplus c_6 \oplus c_5 \oplus c_4 \oplus c_3 \oplus c_2 \oplus c_1 \oplus c_0$$

Звідси отримаємо $c_0 = c_1 = c_7 = 1$ та $c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$. Отже, шуканий поліном Жегалкіна $xyz \oplus z \oplus 1$.

5. Побудувати поліном Жегалкіна за досконалою ДНФ для функції

$$f(x, y, z) = xyz \vee \bar{x}yz \vee xz.$$

Спочатку перетворимо ДНФ у досконалу:

$$\begin{aligned} xyz \vee \bar{x}yz \vee xz &= xyz \vee \bar{x}yz \vee x(y \vee \bar{y})z = xyz \vee \bar{x}yz \vee xyz \vee x\bar{y}z = \\ &= xyz \oplus \bar{x}yz \oplus xyz \oplus x\bar{y}z = xy(1 \oplus z) \oplus (1 \oplus x)yz \oplus xyz \oplus x(1 \oplus y)z = \\ &= xy \oplus xyz \oplus yz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz = xy \oplus yz \oplus xz. \end{aligned}$$

6. Дослідити на лінійність функцію $f(x, y, z) = (xy) \rightarrow \bar{z}$

Побудуємо поліном Жегалкіна функції $f(x, y, z)$ використовуючи такі тотожності:

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y, x \rightarrow y = xy \oplus x \oplus y, \bar{x} = x \oplus 1:$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x \rightarrow y) \rightarrow \bar{z} = (\overline{x \rightarrow y}) \vee \bar{z} = (\overline{xy \oplus x \oplus y}) \vee \bar{z} = \\ &= (xy \oplus x \oplus y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (xy \oplus x \oplus y \oplus 1) \oplus z \oplus 1 = \\ &= xyz \oplus xz \oplus yz \oplus 1 \wedge z \oplus xy \wedge 1 \oplus x \wedge 1 \oplus y \wedge 1 \oplus 1 \wedge 1 \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus \\ &\oplus 1 \oplus z \oplus 1 = xyz \oplus xz \oplus yz \oplus z \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus \\ &1 \oplus z \oplus 1 = xyz \oplus xz \oplus yz \oplus 1. \end{aligned}$$

Отже, функція $f(x, y, z) = (xy) \rightarrow \bar{z}$ не є лінійною, оскільки її поліном Жегалкіна містить кон'юнкції змінних.

Завдання для аудиторної роботи

1. Дослідити на лінійність функції:

а) $f(\tilde{x}^2) = x_1 x_2 (x_1 \oplus x_2)$

б) $f(\tilde{x}^2) = (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \rightarrow x_1) \sim x_2$

в) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) \oplus x_3$

г) $f(\tilde{x}^2) = (1011)$

д) $f(\tilde{x}^3) = (10101001)$

е) $f(\tilde{x}^4) = (0110110000101011)$

2. Побудувати поліном Жегалкіна за ДДНФ для функцій:

а) $f(\tilde{x}^2) = (1101)$

б) $f(\tilde{x}^3) = (01010111)$

в) $f(\tilde{x}^4) = (1010111010111011)$

3. Побудувати поліном Жегалкіна для функцій методом невизначених коефіцієнтів:

а) $f(\tilde{x}^2) = (0111)$

б) $f(\tilde{x}^3) = (01010010)$

в) $f(\tilde{x}^4) = (1110111110111111)$

4. Побудувати поліном Жегалкіна для функцій на основі тотожних перетворень:

а) $f(\tilde{x}^2)$

б) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 | x_2) \downarrow x_3$

в) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \downarrow x_3)$

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції

Що називається поліномом Жегалкіна?

Методи побудови полінома Жегалкіна.

Метод невизначених коефіцієнтів.

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Загальні поняття теорії графів

Мета заняття Сформувати загальні поняття теорії графів, їх основні види і властивості графів

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с. 133-155	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

4 Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали лекції

Теорія графів є однією з істотних частин математичного апарату інформатики та кібернетики. У термінах теорії графів формують велику кількість задач пов'язаних з дискретними об'єктами. Такі задачі виникають під час проектування інтегральних схем, схем керування, у дослідженні автоматів, в економіці і статистиці, теорії розкладів і дискретній оптимізації

Теорія графів бере начало з розв'язку знаменитим математиком Ейлером задачі про кенігсберзькі мости в 1736 році. Задача виникла у пруському містечку Кенігсберг (зараз Калінінград, Російська Федерація) на річці Прегал. Мешканці Кенігсбергу полюбили прогулюватися по стежці, яка включала сім мостів через річку Прегал. Людям було цікаво, чи можуть вони, почавши шлях з однієї ділянки суші, обійти всі мости, побувавши в кожному лиш один раз, і повернутися в точку початку шляху (перепливати річку також заборонялось). Сім мостів з'єднували два береги річки та два островки так, як показано на рис. 24.2,а.

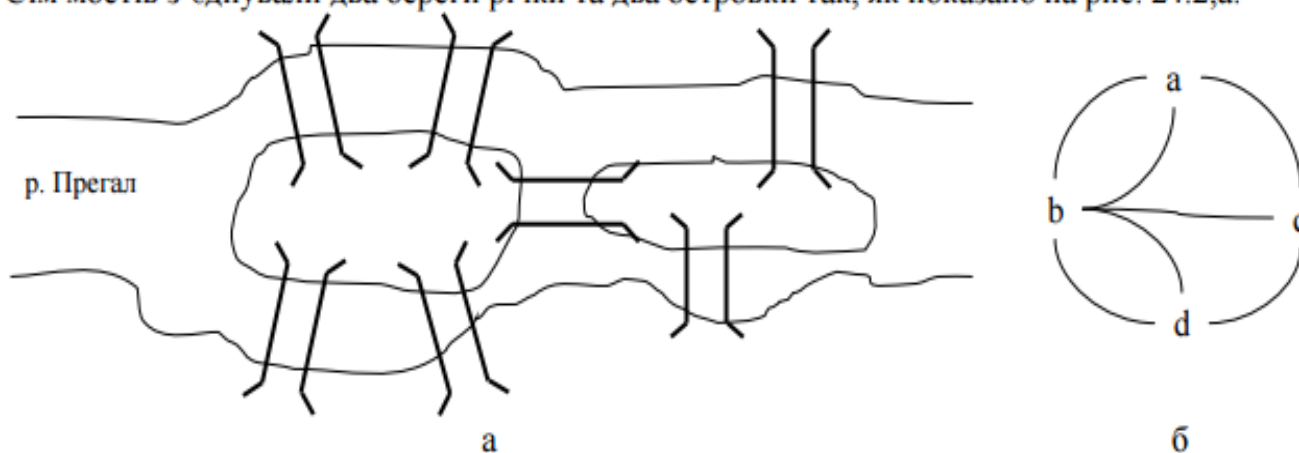
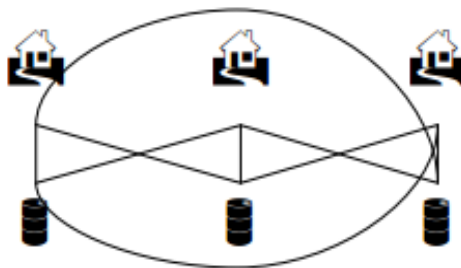


Рис. 24.2.

Ейлер побудував мультиграф, зображений на рис. 24.2,б. В цьому мультиграфі ділянки суші зображені як вершини, а стежки через мости – як ребра. В такому випадку задача здобуває наступне формулювання: починаючи з довільної вершини, проходячи по кожному ребру тільки один раз, повернутися у вихідну вершину. Як виявилось (і в наступних лекціях нами буде це показано), ця задача не має розв'язків.

Прикладом іншої проблеми, яку можна промоделювати на основі теорії графів, є задача про три будинки та три колодязі. Є три будинки та три колодязі, які якимось чином розташовані на площині. Потрібно провести від кожного будинку до кожного колодязя стежку так, щоб стежки не перетинались (рис. 24.3). Куратовський у 1930 році показав, що ця задача також не має розв'язків.



Отримання подальших суттєвих результатів у цій галузі датують серединою XIX століття. Однак початок проведення активних систематичних досліджень та станов-

лення теорії графів як окремого авторитетного розділу сучасної математики відбулося ще майже 100 років по тому, тобто в середині XX століття. Саме з цього часу граф стає однією з найпоширеніших і найпопулярніших математичних моделей у багатьох сферах науки і техніки. Картинка у вигляді набору точок на площині та ліній, проведених між деякими з них, стала зручною і наочною формою зображення найрізноманітніших об'єктів, процесів та явищ.

Великою мірою це пов'язано з виникненням, бурхливим розвитком та поширенням електронних обчислювальних машин і, як наслідок, значним зростанням ролі задач дискретного характеру. Математика від "обслуговування" переважно фізики переходить до проникнення своїх методів у інші сфери людської діяльності. Одним з потужних інструментів такого проникнення є граф.

Із суто формальної точки зору граф можна розглядати як один з різновидів алгебраїчної системи (а саме, як модель), а отже, і всю теорію графів – як розділ сучасної алгебри. Справді, результати та методи алгебри широко використовуються в теорії графів. Однак за останні півстоліття активного інтенсивного та екстенсивного розвитку теорія графів виробила свою достатньо специфічну власну проблематику і методологію. На сьогодні теорія графів є однією зі складових математичного апарату кібернетики, важливим розділом дискретної математики.

Нехай V – деяка непорожня скінченна множина, а $V^{(2)}$ – множина всіх двохелементних підмножин (невпорядкованих пар різних елементів) множини V .

Графом (неорієнтованим графом) G називається пара множин (V, E) , де E – довільна підмножина множини $V^{(2)}$; позначається $G = (V, E)$.

Елементи множини V називаються *вершинами* графа G , а елементи множини E – *ребрами* графа G . Відповідно V називається *множиною вершин* і E – *множиною ребер* графа G .

Традиційно ребра $\{v, w\}$ записуються за допомогою круглих дужок (v, w) (іноді просто vw).

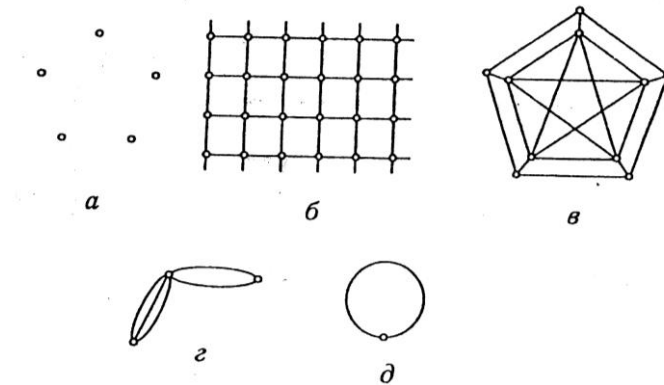
Граф, який складається з однієї вершини, називається *тривіальним*.

Оскільки для тривіального графа або так званих *порожніх* графів $G = (V, \emptyset)$ переважну більшість властивостей та тверджень перевірити неважко, то надалі не будемо кожен раз при формулюванні та доведенні тих чи інших загальних тверджень теорії графів спеціально обумовлювати, що йдеться про нетривіальні графи (при цьому для тривіального або порожнього графів результат може бути дещо іншим).

Нехай задано граф $G = (V, E)$. Якщо $(v, w) \in E$, то кажуть, що *вершини* v і w є *суміжними*, у протилежному разі вершини v і w є *несуміжними*. Якщо $e = (v, w)$ – ребро графа, то вершини v і w називаються *кінцями* ребра e . У цьому випадку кажуть також, що ребро e з'єднує вершини v і w . Вершина v і ребро e називаються *інцидентними*, якщо v є кінцем e .

Графи зручно зображувати графічно, що і зумовило появу їх назви. Елементи множини V зображують точками на площині, а ребра (v_i, v_j) — відрізками (прямолінійними або криволінійними), які з'єднують точки v_i та v_j .

Граф називають *скінченним*, якщо множини його вершин і ребер є скінченними. Множину вершин графа G позначають $V(G)$, а множину ребер — $E(G)$. Кількість вершин $n(G)$ графа називають його *порядком*.



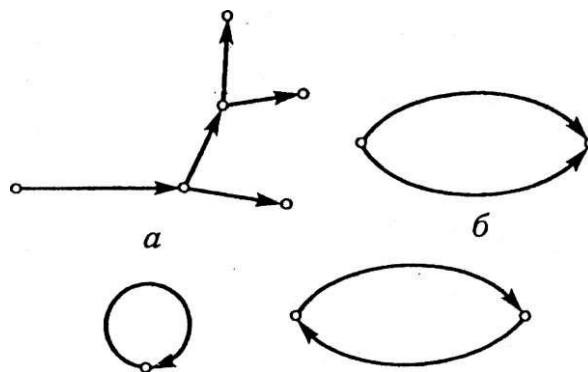
Два *ребра* називаються *суміжними*, якщо вони мають спільну вершину.

Ребра, які з'єднують вершину саму з собою називається *петлею*.

Ребра, які інцидентні одній і тій самій парі вершин, називаються *паралельними* або *кратними*.

Граф, що містить кратні ребра, називають *мультиграфом*.

Мультиграфом називається пара (V, E) , де V — скінченна непорожня множина вершин, а E — сім'я неупорядкованих пар — ребер.



Ребро, яке з'єднує деяку вершину саму з собою називається *петлею*.

Граф із петлями та кратними ребрами називають *псевдографом*.

Псевдографом називається пара (V, E) , де V — скінченна непорожня множина вершин, а E — сім'я неупорядкованих пар не обов'язково різних вершин.

Граф називається *повним*, якщо кожна пара вершин з'єднана ребром, і граф не містить петель і кратних ребер.



Рисунок 3.2.
Мультиграф

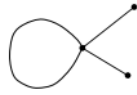


Рисунок 3.3.
Граф з петлею

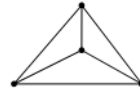


Рисунок 3.4.
Простий граф

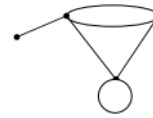


Рисунок 3.5.
Псевдограф

Граф, у якого ребра з'єднують вершини без напрямку, називається *неорієнтованим*.

Граф, у якого ребра з'єднують дві вершини і мають напрям від однієї вершини до іншої, називається *орієнтованим*. Ребра орієнтованого графа називаються *дугами*.

Степінь вершини у неорієнтованому графі – це кількість ребер, інцидентних цій вершині, причому петлю враховують двічі і позначається $\deg(v)$. Якщо $\deg(v) = 0$, то вершина називається *ізольованою*, якщо $\deg(v) = 1$, то вершина називається *вісячою*.

Кубічним графом називається граф, степені всіх вершин якого дорівнюють 3.

Теорема. Сума степенів вершин графа дорівнює подвоєному числу його ребер.

Теорема. У будь-якому графі $G = (V, E)$ кількість вершин непарного степеня парна.

Відомі такі інтерпретації наведених теорем. Загальна кількість рукостискань, які здійснюють люди у будь-якій спільноті, завжди парна. Крім того, кількість людей цієї спільноти, що здійснили непарну кількість рукостискань, завжди є також парною.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції

Визначення графа і його елементів.

Види графів і їх зображення.

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Способи задання графів

Мета заняття Сформувати уявлення про способи задавання графів у вигляді матриць суміжності і інцидентності

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с.133-138	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

4. Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали лекції

Існує декілька способів задання графів.

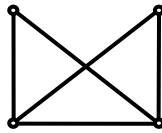
Одним зі способів задання графа $G=(V,E)$ є задання кожної з множин V і E за допомогою переліку їх елементів.

Приклад. Граф $G_1=(V_1,E_1)$, $V_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ і $E_1=\{(v_1,v_3), (v_1,v_4),(v_2,v_3),(v_2,v_4),(v_3,v_4)\}$ – це граф із чотирма вершинами і п'ятьма ребрами.

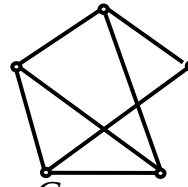
А граф $G_2 = (V_2,E_2)$, $V_2 = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ і $E_2 = \{(v_1,v_2),(v_2,v_4),(v_1,v_5), (v_3,v_2),(v_3,v_5),(v_4,v_1),(v_5,v_4)\}$ – граф із п'ятьма вершинами і сімома ребрами.

Граф $G=(V,E)$ зручно зображати за допомогою рисунка на площині, який називають *діаграмою* графа G . Вершинам графа G ставляться у бієктивну відповідність точки площини; точки, що відповідають вершинам v і w , з'єднуються лінією (відрізком або кривою) тоді і тільки тоді, коли v і w суміжні вершини. Зрозуміло, що діаграма графа змінюватиме свій вигляд у залежності від вибору відповідних точок на площині.

Приклад. На рисунку зображені діаграми графів G_1 і G_2 з попереднього прикладу.



G_1



G_2

Графи можна задавати також за допомогою матриць.

Занумеруємо всі вершини графа G натуральними числами від 1 до n . Матрицею суміжності A графа G називається квадратна $n \times n$ -матриця, в якій елемент a_{ij} i -го рядка і j -го стовпчика дорівнює 1, якщо вершини v_i та v_j з номерами i та j суміжні, і дорівнює 0 у протилежному разі.

Приклад. Для графів G_1 і G_2 маємо відповідно

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, що матриці суміжності графів – симетричні.

Занумеруємо всі вершини графа G числами від 1 до n і всі його ребра – числами від 1 до m . Матрицею інцидентності B графа G називається $n \times m$ -матриця, в якій елемент b_{ij} i -го рядка і j -го стовпчика дорівнює 1, якщо вершина v_i з номером i інцидентна ребру e_j з номером j , і дорівнює 0 у протилежному разі.

Приклад. Для графів G_1 і G_2 маємо (ребра графів нумеруємо в тому порядку, в якому вони виписані в прикладі 1)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нарешті, ще одним способом завдання графів є *списки суміжності*. Кожній вершині графа відповідає свій список. У список, що відповідає вершині v , послідовно записуються всі суміжні їй вершини.

Приклад. Для графів G_1 і G_2 маємо списки

G_1 :	G_2 :
v_1 : v_3, v_4	v_1 : v_2, v_4, v_5
v_2 : v_3, v_4	v_2 : v_1, v_3, v_4
v_3 : v_1, v_2, v_4	v_3 : v_2, v_5
v_4 : v_1, v_2, v_3	v_4 : v_1, v_2, v_5
	v_5 : v_1, v_3, v_4

Вибір та зручність того чи іншого зі способів завдання графів залежать від особливостей задачі, яка розв'язується.

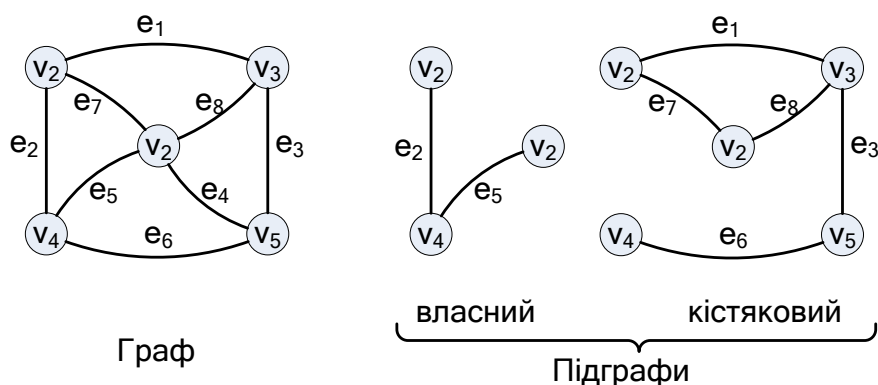
Графи і підграфи

Використання графів при проектуванні різних об'єктів і систем припускає деяке маніпулювання графами і їхніми складовими частинами, а зображення графами просторових об'єктів вимагає формалізації досяжності одних вершин графа з інших. У першому випадку необхідно виділяти складові частини графів, що самі є графами, а в другому випадку – виділяти послідовності вершин і ребер, що з'єднують виділені вершини. Уведемо відповідну термінологію.

Граф $G' = (V', E', \Theta')$ називається *підграфом* графа $G = (V, E, \Theta)$, якщо множини V' і E' є підмножинами, відповідно, множин V і E такими, що $e_i \in E'$, функція Θ визначена для e_i і має значення, що збігається зі значенням функції $\Theta(e_i) = (v_k, v_l)$, тільки в тому випадку, якщо v_k і v_l належать множині V' . Якщо множина E' - власна підмножина множини E чи множина V' - власна підмножина множини V , то граф G' назовемо *власним підграфом* графа G . Якщо усі вершини графа G присутні в графі G' , то граф G' назовемо *кістяковим підграфом* графа G .

Скористаємося геометричним способом задання графів для того щоб про демонструвати наочно особливості підграфів.

Задамо граф і виділимо його власний і кістяковий підграфи.



Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для актуалізації опорних знань та перевірки попереднього матеріалу

Визначення графа і його елементів

Види графів і їх зображення

2 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції

Як будується матриця інцидентності ?

Як будується матриця суміжності?

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Матриці суміжності і матриці інцидентності неорієнтованого графа

Мета Сформувати практичні навички у будові матриці суміжності і матриці інцидентності для неорієнтованих графів

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект, дидактичні матеріали

Час – 2 години

План проведення заняття

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2 Повідомлення теми, формулювання мети та основних завдань	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми практичного заняття, формулювання мети, контроль вихідного рівня знань студентів
3 Основна частина	60 хв	Включає в себе: інструктаж з техніки безпеки на робочому місці; самостійне виконання студентами завдань
4 Заклучна частина Домашнє завдання: [4], с.133-138	5 хв	Включає в себе: підведення підсумків, узагальнення матеріалу, видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць

Література

4. Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали лекції

Матриця інцидентності:

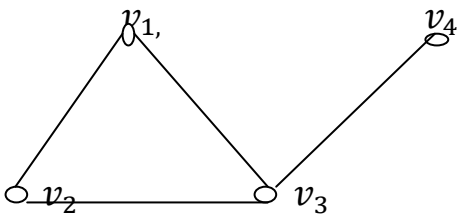
Неорієнтований граф
$M = \{m_{ij}\}, \quad i, j = \overline{n, m}$ $m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } v_i \text{ і } e_j \text{ інцидентні} \\ 0, & \text{якщо } v_i \text{ і } e_j \text{ неінцидентні} \end{cases}$

Матриця суміжності:

Неорієнтований граф
$B = \{b_{ij}\}, \quad i, j = \overline{n, m}$ $b_{ij} = \begin{cases} k, & \text{кількість ребер, які сполучають вершини } v_i \\ 0, & \text{якщо вершини } v_i \text{ не сполучаються ребрами} \end{cases}$

Приклади розв'язання типових задач

Приклад. Задати зображений неорієнтований граф множиною вершин і ребер.

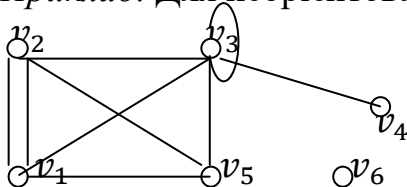


Розв'язання.

Множина вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Множина ребер $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$

Приклад. Для неорієнтованого графа визначити степені вершин

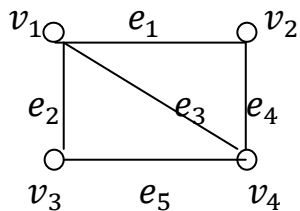


Розв'язання .

$\deg(v_1) = 4, \deg(v_2) = 4, \deg(v_3) = 6,$

$\deg(v_4) = 1, \deg(v_5) = 3, \deg(v_6) = 0$

Приклад. Для неорієнтованого графа побудувати матрицю інцидентності і матрицю суміжності



Матриця інцидентності						Матриця суміжності				
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5		v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	1	1	0	0	v_1	0	1	1	1
v_2	1	0	0	1	0	v_2	1	0	0	1
v_3	0	1	0	0	1	v_3	1	0	0	1
v_4	0	0	1	1	1	v_4	1	1	1	0

Завдання для аудиторної роботи

4.1.13. За даною матрицею суміжності побудувати її граф:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} &
 \text{b)} \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} &
 \text{c)} \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ x_5 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}
 \end{array}$$

4.1.14. За даною матрицею інцидентності побудувати її граф:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} &
 \text{b)} \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} &
 \text{c)} \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ x_5 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}
 \end{array}$$

4.1.15. Для матриці суміжності із задачі № 13 побудувати її матрицю інцидентності.

4.1.16. Для матриці інцидентності із задачі № 14 побудувати її матрицю суміжності.

4.1.17. Побудувати два ізоморфних графа, що містять.

a) 3 вершини і 4 ребра;

b) 4 вершини і 3 паралельних ребра;

c) 5 вершин і 3 петлі.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу

Як будується матриця інцидентності для неорієнтованого графа?

Як будується матриця суміжності для неорієнтованого графа?

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Маршрути, ланцюги, цикли. Зв'язність графів.

Мета заняття Ознайомитися з поняттям маршруту, цикла, віддалі графа,
навчитися визначати ексцентриситет вершини, радіус, діаметр, центр графа

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [4], с.138-152	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

4 Трохимчук, Р.М. Дискретна математика: підручник [Текст] / Р.М. Трохимчук, - Київ: ДП «Персонал», 2010. – 525 с.

Навчальні матеріали лекції

Шляхом довжиною r із вершинами u в вершину v в неорієнтованому графі називають послідовність ребер $e_1 = \{x_0, x_1\}, e_2 = \{x_1, x_2\}, \dots, e_r = \{x_{r-1}, x_r\}$, де $x_0 = u, x_r = v$, r натуральне число. Шлях довжиною r має r ребер, причому ребра враховують стільки разів, скільки вони входять у шлях. Вершини u та v називають *крайніми*, а решту вершин шляху – *внутрішніми*.

Циклом у неорієнтованому графі називають шлях, який з'єднує вершину саму із собою, тобто $u=v$.

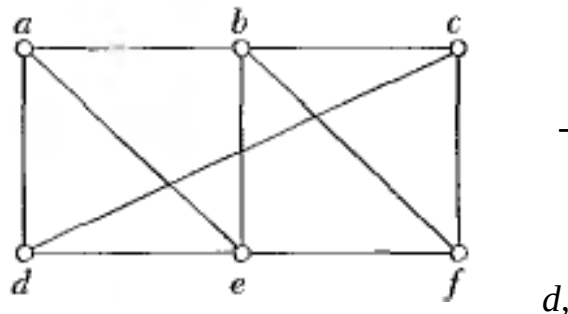
У простому графі шлях можна задати послідовністю вершини через, яку він проходить: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, x_r$.

Шлях або цикл називають *простим*, якщо він не містить повторюваних ребер.

Граф, усі ребра якого утворюють простий цикл довжини n , позначається C_n .

Простий цикл довжини 3 називається *трикутником*.

Приклад. На рисунку зображено простий граф. У ньому a, b, c, f, e -простий шлях довжиною 4, оскільки пари $\{a,b\}, \{d,c\}, \{c,f\}$, та $\{f,e\}$ -ребра. Однак b, c, f, e, b - не шлях, бо пара не ребро. Зазначимо, що b, c, f, e, b - простий цикл довжиною 4, позаяк $\{d,c\}, \{c,f\}, \{f,e\}$, та $\{e,b\}$ -ребра та цей шлях починається і закінчується в одній і тій самій вершині b . Шлях a, b, e, a, b довжина якого дорівнює 5, не простий, оскільки він двічі проходить через ребро $\{a,b\}$



Неорієнтований граф називають *зв'язаним*, якщо будь-які дві його вершини з'єднують шляхом. Граф називають *незв'язаним*, якщо він не є зв'язаним. Незв'язаний граф складеться з двох або більше зв'язаних підграфів, кожна пара з яких не має спільних вершин. Ці зв'язані підграфи називаються *підкомпонентами зв'язаності* або просто компонентами графа.

Віддаллю $d(u, v)$ між вершинами u та v називають довжину найкоротшого (u, v) шляху, а сам цей шлях називають *геодезичним*. Легко переконатись, що найкоротший шлях не містить повторюваних вершин (і ребер).

Центром графа називається вершина, від якої найбільша відстань до інших вершин являється мінімальною.

Максимальна відстань від центру графа до його вершин називається *радіусом* графа і позначається $r(G)$

Теорема. Між кожною парою різних вершин зв'язного неорієнтованого графа існує простий шлях.

Для орієнтованого графа вводять поняття *орієнтованого шляху* (або просто *шляху*) з вершини u у вершину v . Це скінченна послідовність дуг $e_1 = (x_0, x_1), e_2 = (x_1, x_2), \dots, e_r = (x_{r-1}, x_r)$. Вершини u та v , як і в неорієнтованому графі, називають *крайніми*, а решту вершин шляху — *внутрішніми*. Довжиною шляху називають кількість дуг, з яких він складається. *Орієнтованим циклом* називають орієнтований шлях, який з'єднує вершину саму із собою, тобто $u = v$.

Орієнтований шлях або цикл називають *простим*, якщо жодна дуга не міститься в ньому більше одного разу.

Цикл графа, що містить усі його ребра, називається *ейлеровим циклом*.

Простий цикл графа, що проходить через усі його вершини, називається *гамільтоновим циклом*.

Ейлерів і гамільтонів цикли (обходи) можливі не для будь-якого чи графа орграфа. В оргграфі при визначенні маршруту, ланцюга, циклу, ейлерова і гамільтонова циклу природно враховується напрямок дуг.

Лема. Будь-який маршрут, що веде з вершини v у вершину w , містить у собі простий ланцюг, що веде з v у w .

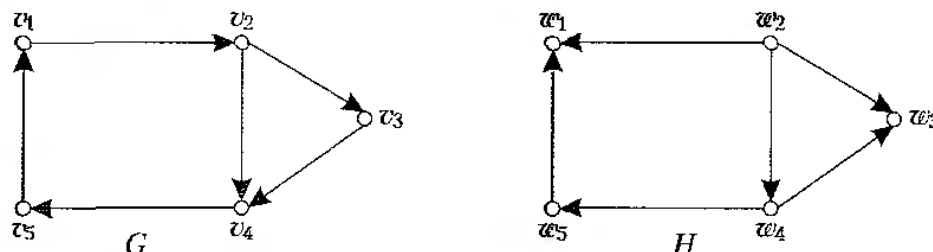
Для орієнтованого графа поняття зв'язності вводять по-різному, залежно від того, чи враховано напрямок.

Орієнтований граф називають *сильно зв'язним*, якщо для будь-яких його різних вершин u та v існують орієнтовані шляхи від u до v . Отже, для сильної зв'язності орієн-

тованого графа має існувати послідовність дуг з урахуванням орієнтації від будь-якої вершини графа до будь-якої іншої.

Орієнтований граф може не бути сильно зв'язним, але може бути, в «одному цілому». Орієнтований граф називають *слабко зв'язним*, якщо існує шлях між будь-якими двома різними вершинами у відповідному йому неорієнтованому графі (тобто без урахування напрямку дуг).

Зрозуміло, що сильно зв'язний граф водночас і слабко зв'язний.



Приклад. На рис. зображено графи G та H . Граф G сильно зв'язний. Граф H слабко зв'язний; він не сильно зв'язний, бо не існує орієнтованого шляху від w_1 до w_2 .

Кількість різних шляхів між двома довільними вершинами графа можна підрахувати за допомогою матриці суміжності.

Теорема. Нехай G — граф (орієнтований або неорієнтований; можуть бути також кратні ребра й петлі), A — його матриця суміжності, яка відповідає заданій нумерації вершин $v_1 v_2 \dots v_n$. Тоді кількість різних шляхів довжиною r (r — натуральне) з вершини v_i у вершину v_j дорівнює (i,j) -му елементу матриці A^r .

Відношення зв'язності Z рефлексивне, транзитивне і симетричне, а значить, є відношенням еквівалентності на множині V .

Теорема. Будь-який граф однозначно зображається у вигляді прямої суми своїх компонент зв'язності.

Теорема. Для будь-якого графа $G=(V,E)$ або він сам, або його доповнення є зв'язним графом.

Теорема. Нехай $G=(V,E)$ зв'язний граф і e деяке його ребро. Розглянемо граф G' , який отримано з G вилученням ребра e :

- а) якщо ребро e належить деякому циклу графа G , то граф G' є зв'язним графом;
- б) якщо ребро e не належить жодному циклу графа G , то граф G' не є зв'язним графом і має рівно дві компоненти зв'язності.

Теорема. Нехай $G=(V,E)$ граф з n вершинами і k компонентами зв'язності. Тоді число його ребер m задовольняє такі нерівності: $n - k \leq m \leq (n - k)(n - k + 1)/2$.

Наслідок. Довільний зв'язний граф з n вершинами містить не менше ніж $n - 1$ ребро.

Наслідок. Якщо в графі G з n вершинами кількість ребер більша ніж $(n - 1)(n - 2)/2$, то граф G зв'язний.

Перевірка зв'язності графів

Зв'язність заданого графа G зручно перевіряти за допомогою його матриці суміжності A .

Теорема. Нехай A – матриця суміжності графа $G=(V,E)$ з n вершинами ($|V|=n$). Тоді елемент $a_{ij}^{(k)}$ i -го рядка і j -го стовпчика матриці A^k дорівнює кількості шляхів довжини k , які ведуть в графі G з вершини v_i у вершину v_j .

Наслідок. Нехай A – матриця суміжності графа $G=(V,E)$ з n вершинами. В графі G вершини v_i і v_j ($i \neq j$) є зв'язаними тоді і тільки тоді, коли елемент i -го рядка і j -го стовпчика матриці $A+A^2+A^3+\dots+A^{n-1}$ не дорівнює нулю.

Наслідок 3.9.2. Граф G буде зв'язним тоді і тільки тоді, коли в матриці $M^{(n)}$ немає нульових елементів.

Граф $G^*=(V,E^*)$ називається *транзитивним замиканням* даного графа $G=(V,E)$, якщо $(v,w) \in E^*$ тоді і тільки тоді, коли вершини v і w є зв'язані в графі G .

Таким чином, транзитивне замикання графа G є повним графом тоді і тільки тоді, коли граф G зв'язний.

Якщо графу $G=(V,E)$ відповідає відношення R на V , то графу G^* відповідатиме транзитивне замикання R^* відношення R .

Побудуємо для графа G^* $n \times n$ -матрицю A^* за таким правилом: (i,j) -тий елемент матриці A^* дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли відповідний елемент матриці $M^{(n)}$ не дорівнює 0, всі інші елементи матриці A^* дорівнюють 0.

Матрицю A^* називають *матрицею досяжності* графа G (інші назви: *матриця зв'язності*, *матриця зв'язку*).

Обчислення матриці досяжності A^* графа G^* можна здійснити й іншим методом.

Позначимо через $A^{(1)}$ бульову матрицю, елементи якої повністю збігаються з елементами матриці A , але розглядаються не як числа 0 і 1, а як символи бульового алфавіту 0 і 1. Введемо операцію бульового множення $C \wedge D$ матриць C і D , які складаються з булевих елементів 0 і 1, таким чином: елемент f_{ij} матриці $C \wedge D$ дорівнює $f_{ij} = (c_{it} \wedge d_{tj})$, де c_{it} і d_{tj} – елементи матриць C і D , а операції $\vee$ і $\wedge$ – це операції диз'юнкції та кон'юнкції.

Позначимо через $A^{(m)}$ матрицю $A^{(1)} \wedge A^{(1)} \wedge \dots \wedge A^{(1)}$ (m разів).

Аналогічно теоремі 3.9 може бути доведена така теорема.

Теорема. Нехай $A^{(1)}$ – булева матриця, яка відповідає матриці суміжності A графа $G=(V,E)$. Елемент $b_{ij}^{(m)}$ ($i \neq j$) матриці $A^{(m)}$ дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли в графі G існує принаймні один шлях довжини m , що веде з вершини v_i у v_j .

Наслідок 3.10.1. Матриця досяжності A^* графа G з n вершинами може бути обчислена за формулою $A^* = I_n^{(1)} \vee A^{(1)} \vee A^{(2)} \vee \dots \vee A^{(n-1)}$. (Операція диз'юнкції виконується для матриць поелементно).

Наслідок 3.10.2. Граф G є зв'язний тоді і тільки тоді, коли всі елементи його матриці досяжності A^* дорівнюють 1.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції

Дати означення шляху, циклу. Що таке віддаль між вершинами графа?

Який граф називається зв'язним?

Дати означення сильно, слабо зв'язаного орієнтованого графа.

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Метричні характеристики графів.

Мета заняття Ознайомитися з основними метричними характеристиками графа та способами їх знаходження

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [2], с. 218-220	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

2 Матвієнко М.П. Дискретна математика: початковий посібник [Текст] / М.П. Матвієнко – К. «Дискретна математика», 2014 – 348 с.

Навчальні матеріали лекції

Шляхом довжиною r із вершинами u в вершину v в неорієнтованому графі називають послідовність ребер $e_1 = \{x_0, x_1\}, e_2 = \{x_1, x_2\}, \dots, e_r = \{x_{r-1}, x_r\}$, де $x_0 = u, x_r = v$, r натуральне число. Шлях довжиною r має r ребер, причому ребра враховують стільки разів, скільки вони входять у шлях. Вершини u та v називають *крайніми*, а решту вершин шляху – *внутрішніми*.

Циклом у неорієнтованому графі називають шлях, який з'єднує вершину саму із собою, тобто $u=v$.

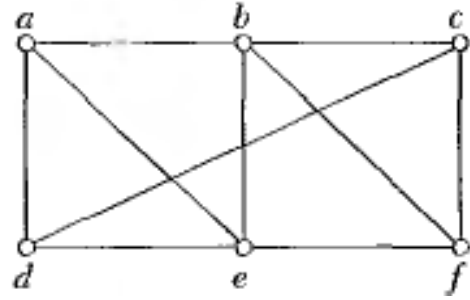
У простому графі шлях можна задати послідовністю вершини через, яку він проходить: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, x_r$.

Шлях або цикл називають *простим*, якщо він не містить повторюваних ребер.

Граф, усі ребра якого утворюють простий цикл довжини n , позначається C_n .

Простий цикл довжини 3 називається *трикутником*.

Приклад. На рисунку зображено простий граф. У ньому a, b, c, f, e - простий шлях довжиною 4, оскільки пари $\{a,b\}, \{d,c\}, \{c,f\}$, та $\{f,e\}$ - ребра. Однак b, c, f, e, b - не шлях, бо пара не ребро. Зазначимо, що b, c, f, e, b - простий цикл довжиною 4, позаяк $\{d,c\}, \{c,f\}, \{f,e\}$, та $\{e,b\}$ - ребра та цей шлях починається і закінчується в одній і тій самій вершині b . Шлях a, b, e, d, a, b довжина якого дорівнює 5, не простий, оскільки він двічі проходить через ребро $\{a,b\}$



Неорієнтований граф називають *зв'язаним*, якщо будь-які дві його вершини з'єднують шляхом. Граф називають *незв'язаним*, якщо він не є зв'язаним. Незв'язаний граф складеться з двох або більше зв'язаних підграфів, кожна пара з яких не має спільних вершин. Ці зв'язані підграфи називаються *підкомпонентами зв'язаності* або просто компонентами графа.

Віддаллю $d(u, v)$ між вершинами u та v називають довжину найкоротшого $\{u, v\}$ шляху, а сам цей шлях називають *геодезичним*. Легко переконатись, що найкоротший шлях не містить повторюваних вершин (і ребер).

Центром графа називається вершина, від якої найбільша відстань до інших вершин являється мінімальною.

Максимальна відстань від центру графа до його вершин називається *радіусом* графа і позначається $r(G)$

Для фіксованої вершини u величина $e(u) = \max d(uv)$ називається *ексцентриситетом* вершини u . Максимальний серед всіх ексцентриситетів вершин називається діаметром графа G і означається через $d(G)$. Тим самим

$$dG = \max e(u)$$

Вершина v називається *периферійною*, якщо $e(v) = d(G)$.

Простий ланцюг довжини $d(G)$, відстань між кінцями якої рівна $d(G)$, називається діаметральним ланцюгом.

Мінімальний з ексцентриситетів вершин зв'язного графа називається його *радіусом* і означається через $r(G)$.

Очевидно, що радіус графа не більше його діаметра.

Вершина v називається *центральною*, якщо $e(v) = r(G)$. Безліч всіх центральних вершин графа називається його *центром*. Граф може мати єдину центральну вершину або декілька центральних вершин. Нарешті, центр графа може співпадати з безліччю всіх вершин. Наприклад, центр простого ланцюга P_n при парному числі вершин n складається рівне з двох вершин, а при непарному - з однієї; для циклу ж C_n всі вершини є центральними.

Задача знаходження центральних вершин графа постійно виникає в практичній діяльності людей. Нехай, наприклад, граф представляє мережу доріг, т. е. вершини його відповідають окремим населеним пунктам, а ребра - дорогам між ними. Потрібно оптимально розмістити лікарні, магазини. У подібних ситуаціях критерій оптимальності часто полягає в оптимізації "найгіршого" випадку, т. е. в мінімізації відстані від місця обслуговування до найбільш видаленого пункту. Отже, місцями розміщення повинні бути центральні вершини графа.

Реальні задачі (їх називають мінімаксними задачами розміщення) відрізняються від ідеальної тим, що доводиться ще враховувати інші обставини - фактичні відстані між окремими пунктами, вартість, час проїзду і інше. Для того щоб врахувати це, використовують зважені графи.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції

Дати означення шляху, циклу.

Що таке віддаль між вершинами графа?

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема **Операції над графами.**

Мета заняття Розглянути можливі операції над графами та їх властивості.

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [2], с.220-227	5 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

2 Матвієнко М.П. Дискретна математика:начальний посібник [Текст] /М.П.Матвієнко – К. «Дискретна математика», 2014 – 348 с.

Навчальні матеріали лекції

Для графів можна означити операції об'єднання, перетину і доповнення.

Об'єднанням графів $G_1=(V_1,E_1)$ і $G_2=(V_2,E_2)$ називається граф $G=(V_1\cup V_2,E_1\cup E_2)$; позначається $G=G_1\cup G_2$.

Об'єднання $G=G_1\cup G_2$. називається *прямою сумою* графів G_1 і G_2 , якщо $V_1\cap V_2=\emptyset$.

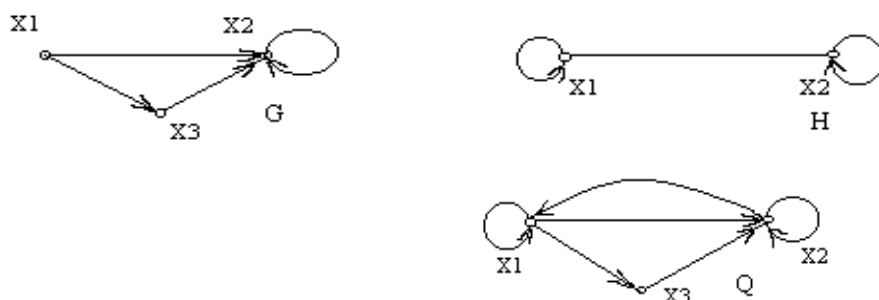


Рис. 1. Об'єднання графів

Перетином і різницею графів $G_1=(V,E_1)$ і $G_2=(V,E_2)$ з однаковими множинами вершин називаються графи $G \hat{=}(V,E_1 \cap E_2)$ і $G \hat{'}=(V,E_1 \setminus E_2)$ відповідно; позначаються - $G \hat{=} G_1 \cap G_2$ і $G \hat{'} = G_1 \setminus G_2$.

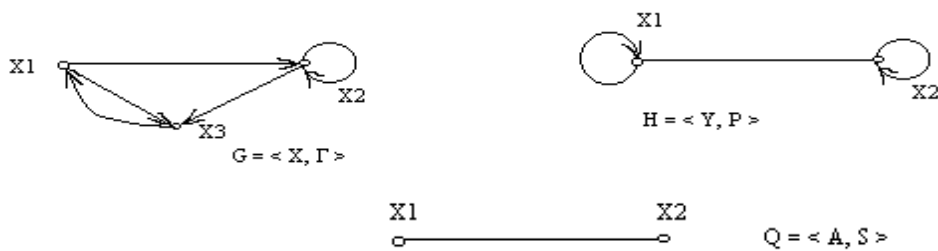


Рис. 2. Різниця графів $Q = G \setminus H = G \cap \bar{H}$

Доповненням графа $G=(V,E)$ називається граф $\bar{G}=(V, V^{(2)} \setminus E)$. Отже, граф $\bar{G}$ має ту саму множину вершин V , що і граф G , а вершини графа $\bar{G}$ суміжні тоді і лише тоді, коли вони несуміжні в G . Для графа G з n вершинами виконується $\bar{\bar{G}} = K_n \setminus G$.

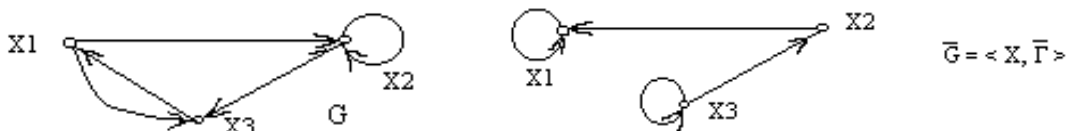


Рис. 3. Доповнення графа $\bar{G} = \langle X, \bar{\Gamma} \rangle$

Таким чином можна означити алгебру графів, носієм якої є множина Γ всіх графів. Існують й інші операції для графів, отже, сигнатуру алгебри A можна розширювати.

Неважко переконатись у справедливості такого твердження.

Теорема. Графи G_1 і G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли ізоморфні їхні доповнення $\bar{G}_1$ і $\bar{G}_2$.

Приклад. Об'єднання і перетин графів H_1 і H_2 з попереднього прикладу зображені на рис.4. Доповнення графів G_2 і H_2 зображені на рис. 5.



Рис.4



Питання та завдання до контролю знань студентів

- 1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції
Дати означення графа, вказати способи його задання.
Які теоретико-множинні операції можна застосовувати до графів?

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Дерева. Означення та властивості

Мета заняття Ознайомитися з поняттям дерева, лісу, розглянути їх властивості

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с.214-219	5 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

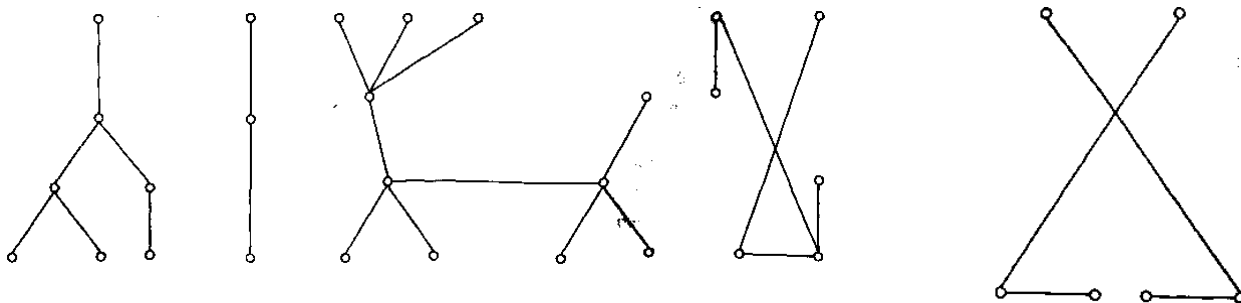
Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст]/ Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

Навчальні матеріали лекції

Деревом називають зв'язний граф без простих циклів. Граф, який не містить простих циклів і складається з k компонент, називають **лісом** із k дерев.

З означення випливає, що дерева й ліси являють собою прості графи.



Приклад. На рис. зображено приклади дерев. Граф, який зображено на рис. 2 – не

дерево, бо він незв'язний.

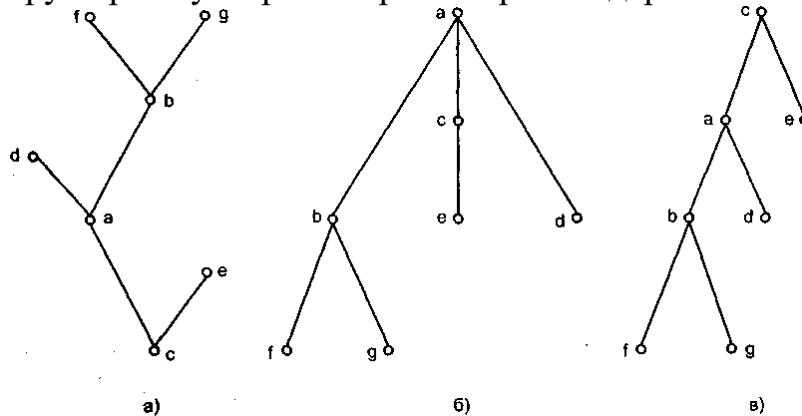
Теорема. Нехай граф T має n вершин. Тоді такі твердження еквівалентні:

1. граф T - дерево;
2. граф T не містить простих циклів і має $(n-1)$ ребро;
3. граф T зв'язний і має $(n-1)$ ребро;
4. граф T зв'язний, але видалення довільного ребра робить його незв'язним;
5. довільні дві вершини графа T з'єднані точно одним простим шляхом;
6. граф T не містить простих циклів, але, додавши до нього довільне нове ребро (без додавання вершин), отримаємо точно один простий цикл.

Наслідок. Ліс із k дерев, який містить n вершин, має $(n-k)$ ребер.

Розглянемо кореневе дерево. У багатьох застосуваннях певну вершину дерева означають як *корінь*. Тоді можна природно приписати напрямок кожному ребру. Оскільки існує єдиний простий шлях від кореня до кожної вершини графа, то можна орієнтувати кожне ребро в напрямку від кореня. Отже, дерево разом із виділеним коренем утворює орієнтований граф, який називають *кореневим деревом*.

Різні способи вибору кореня утворюють різні кореневі дерева.



Приклад. На рис. а зображено дерево, а на рис. б, в - кореневі дерева з коренями відповідно у вершинах а та с.

Нехай T – кореневе дерево. Якщо v – його вершина, відмінна від кореня, то *батько* v – це єдина вершина u така, що є орієнтоване ребро (u, v) . Якщо u – батько, то v – *син*. Аналогічно за генеалогічною термінологією можна означити інших предків і нащадків вершини v . Вершини дерева, які не мають синів, називають *листями*. Вершини, які мають синів, називають *внутрішніми*. Корінь належить до внутрішніх вершин.

Якщо a – вершина дерева, то *піддерево* з коренем a – це підграф, що містить a та всі вершини – нащадки вершини a , а також інцидентні їм ребра.

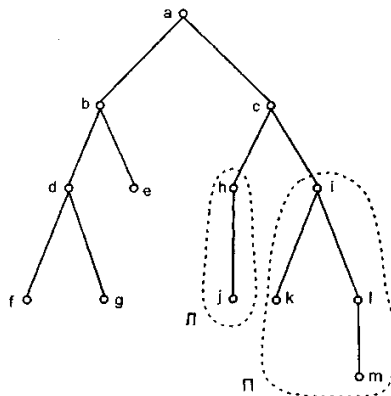
Кореневе дерево називають *t -арним*, якщо кожна його внутрішня вершина має не більше ніж t синів. Дерево називають *повніш t -арним*, якщо кожна його внутрішня вершина має точно t синів. У разі $t=2$ дерево називають *бінарним*.

Упорядковане кореневе дерево – це кореневе дерево, у якому сини кожної внутрішньої вершини впорядковані. На рисунку таке дерево зображають так, щоб сини кожної вершини були розміщені зліва направо.

Якщо внутрішня вершина впорядкованого бінарного дерева має двох синів, то першого називають *лівим сином*, а другого – *правим*. Піддерево з коренем у вершині, яка являє собою лівого сина вершини v , називають *лівим піддеревом у вершині v* . Якщо корінь піддерева – правий син вершини v , то таке піддерево називають *правим піддеревом у вершині v* .

Приклад. У дереві, зображеному на рис., Л і П – відповідно ліве та праве піддерева у

вершині c .



Теорема. Повне m -арне дерево зі внутрішніми вершинами містить $n=mi+1$ вершин.

Теорема. Нехай m -арне дерево має висоту h . Тоді в ньому не більше ніж m^h листків.

Питання та завдання до контролю знань студентів

- 1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції
Дати означення дерева, лісу, піддерева, кореневого дерева.
Властивості дерев та його елементів.

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Алфавітне та рівномірне кодування. Оптимальне кодування.

Мета заняття Сформулювати уявлення про принципи і методику рівномірного і алфавітного кодування

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [2], с.282-289	10 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

2 Матвієнко М.П. Дискретна математика: початковий посібник [Текст] / М.П. Матвієнко – К. «Дискретна математика», 2014 – 348 с.

Навчальні матеріали лекції

Питання кодування здавна відігравало значну роль у математиці. Наприклад, десяткова позиційна система числення – це спосіб кодування натуральних чисел. Римські цифри – інший спосіб кодування натуральних чисел, до того ж більш наглядний та природний: палець – I, п'ятірня – V, дві п'ятірні – X. Але при цьому способі кодування складніше виконувати арифметичні дії над великими числами, тому він був витиснений позиційною десятковою системою.

Раніше засоби кодування відігравали допоміжну роль і не розглядались як окремий предмет математичного вивчення, але з появою комп'ютерів ситуація радикально змінилась. Теорія кодування виникла у 40-х роках XX століття після появи робіт К. Шенона. У цій теорії досліджуються методи кодування, пов'язані з основними математичними моделями, які відображають істотні риси реальних інформаційних систем.

Кодування буквально пронизує інформаційні технології і є центральним питанням при розв'язанні самих різних (практично усіх задач) програмування:

- представлення даних довільної природи (наприклад, чисел, тексту, графіки) у пам'яті комп'ютера;
- захист інформації від несанкціонованого доступу;
- забезпечення перешкодозахищеності при передачі даних по каналам зв'язку;
- стиснення інформації у базах даних.

Властивості, які вимагаються від кодування, бувають різної природи:

- існування декодування – це дуже природна властивість, але навіть вона потрібна не завжди. Наприклад, трансляція програми на мові високого рівня у машинні команди – це кодування, для якого не потрібно однозначного декодування;
- перешкодозахищеність, або виправлення помилок – коли від кодування вимагається можливість відновлення інформації в разі її пошкодження;
- задана складність (або простота) кодування та декодування. Наприклад, у криптографії вивчаються такі способи кодування, при яких є просто обчислювальна функція F , але визначення зворотної функції F^{-1} потребує дуже складних обчислень.

Кодування у широкому розумінні - це перехід від одного способу задання інформації до іншого, який дає змогу відновлювати початкову інформацію.

Перш ніж розглянути завдання кодування, необхідно розглянути ряд визначень, що використовуються в теорії кодування:

Код

- правило, що описує відповідність знаків або їх поєднань одного алфавіту знаків або їх сполученням іншого алфавіту;
- знаки вторинного алфавіту, використовувані для представлення знаків або їх поєднань первинного алфавіту.

Кодування - переклад інформації, представленої за допомогою первинного алфавіту, в послідовність кодів.

Декодування - операція, зворотна кодуванню, тобто відновлення інформації в первинному алфавіті за отриманою послідовністю кодів.

Операції кодування і декодування називаються оборотними, якщо їх послідовне застосування забезпечує повернення до вихідної інформації без будь-яких її втрат.

Інформаційна ентропія - в теорії зв'язку ентропія використовується як міра невизначеності очікуваного повідомлення, тобто ентропія джерела інформації з незалежними повідомленнями є середнє арифметичне кількостей інформації повідомлень

Прикладом оборотного кодування є представлення знаків у телеграфному коді і їх відновлення після передачі. Прикладом кодування незворотного може бути переклад з однієї природної мови на іншу - зворотний переклад, взагалі кажучи, не відновлює вихідного тексту. Безумовно, для практичних завдань, пов'язаних із знаковою поданням інформації, можливість відновлення інформації за її кодом є необхідною умовою застосування коду, тому в подальшому викладі буде розглядатися тільки оборотне кодування.

Таким чином, кодування передуює передачі та зберігання інформації. При цьому, як зазначалося раніше, зберігання пов'язане з фіксацією деякого стану носія інформації, а передача - зі зміною стану з плином часу (тобто процесом). Ці стани або сигнали будемо називати елементарними сигналами - саме їх сукупність і складає вторинний алфавіт.

Без технічних сторін передачі і зберігання повідомлення (тобто того, яким чином фактично реалізовані передача-приймом послідовності сигналів або фіксація станів), математична постановка задачі кодування, дається наступним чином.

Основними завданнями кодування є:

1. Забезпечення економічності передачі інформації за допомогою усунення надмірності.
2. Забезпечення надійності (завадостійкості) передачі інформації
3. Узгодження швидкості передачі інформації з пропускнуою спроможністю каналу.

Відповідність між елементами дискретних повідомлень і видом кодування забезпечується вибором:

1. тривалості сигналів
2. довжини кодового слова
3. алфавіту знаків і способу кодування (побуквенное, блочного)

Задачу кодування можна сформулювати так.

Нехай задано алфавіт $A = \{a_1, \dots, a_r\}$, який складається зі скінченної кількості букв.

Скінчену послідовність символів алфавіту A : $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_l}$ називають **словом** в алфавіті A , а число l — **довжиною слова** α . Довжину слова α позначають $l(\alpha)$.

Множину всіх слів в алфавіті A позначають A^* .

Порожнє слово не містить жодної букви, його позначають $\lambda, \lambda \in A^*, l(\lambda) = 0, \lambda \notin A$.

Якщо $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$, то α_1 називають **початком** або **префіксом слова** α , а α_2 — **закінченням** або **постфіксом слова** α .

Нехай S - підмножина множини A^* . Елементи множини S називають **повідомленнями**.

Нехай задано скінченний алфавіт $B = \{b_1, \dots, b_q\}$. Через β позначимо слово в алфавіті B і через B^* — множину усіх не порожніх слів в алфавіті B .

Задамо відображення F , яке кожному слову α , $\alpha \in S$ ставить у відповідність слово $\beta = F(\alpha)$, $\beta \in B^*$.

Слово β називають **кодом** повідомлення α . Перехід від слова α до його коду називають **кодуванням**.

Якщо $|B| = q$, то кодування називають **-ковим**.

Найбільш поширений випадок $B = \{0,1\}$ - **двійкове кодування**.

В теорії кодування відображення F задається деяким алгоритмом. Розглянемо два способи задання відображення F .

Алфавітне кодування.

Алфавітне кодування задають схемою (або таблицею) кодів σ :

$$a_1 \rightarrow \beta_1$$

$$a_2 \rightarrow \beta_2$$

...

$$a_r \rightarrow \beta_r$$

де $a_i \in A$, $\beta_i \in B^*$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Схема σ задає відповідність між буквами алфавіту A та деякими словами в алфавіті B . Вона визначає алфавітне кодування так: кожному слову $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_l}$ з S ставить у відповідність слово $\beta = \beta_{i_1} \beta_{i_2} \dots \beta_{i_l}$. Слова $\beta_1 \dots \beta_2$ називають **елементарними кодами**.

Наприклад, розглянемо алфавіт $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{0, 1\}$ і схему:

$$\sigma_1 = \langle 0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 10, 3 \rightarrow 11, 4 \rightarrow 100, 5 \rightarrow 101, 6 \rightarrow 110, 7 \rightarrow 111, 8 \rightarrow 1000, 9 \rightarrow 1001 \rangle.$$

Ця схема однозначна, але кодування не є взаємно однозначним:

$$F_{\sigma_1}(333) = 111111 = F_{\sigma_1}(77),$$

а значить, неможливе декодування. З іншого боку, схема

$$\sigma_1 = \langle 0 \rightarrow 0000, 1 \rightarrow 0001, 2 \rightarrow 0010, 3 \rightarrow 0011, 4 \rightarrow 0100, 5 \rightarrow 0101, \\ 6 \rightarrow 0110, 7 \rightarrow 0111, 8 \rightarrow 1000, 9 \rightarrow 1001 \rangle,$$

відома під назвою «двійково-десятькове кодування», допускає однозначне декодування.

Рівномірне кодування.

Рівномірне кодування з параметрами k та n визначають так. Повідомлення α розбивають на блоки довжини k

$$\sigma = \langle x_1 \dots x_k \rangle \langle x_{k+1} \dots x_{2k} \rangle \dots \langle x_{mk+1} \dots x_{mk+s} \rangle$$

де $s \leq k$ (останній блок може бути коротшим, у такому разі спосіб його кодування спеціально обумовлюється)

Блоки довжини k розглядають як букви деякого алфавіту та кодують його словами в алфавіті B однакової довжини n за схемою рівномірного кодування $\sigma_{k,n}$:

Надлишковістю схеми $\sigma_{k,n}$ на символ повідомлення називають величину $R = \frac{n-k}{k} = \frac{n}{k} - 1$.

Оптимальне кодування

Оптимальним кодуванням називають процедуру перетворення символів первинного алфавіту А на кодові комбінації вторинного алфавіту В, при якій середня довжина повідомлення у вторинному алфавіті мінімальна.

Знайти код, який був би оптимальним з усіх точок зору практично неможливо. Код може бути оптимальним лише за певних умов (з точки зору швидкості передачі інформації, здатності виправляти помилки тощо).

Проста ідея побудови коду, близького до оптимального, належить американському математику Фано.

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції

Означення кодування.

Принцип алфавітного кодування?

Принцип рівномірного кодування?

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Код Фано. Код Хаффмана

Мета заняття Сформулювати уявлення про принципи і методику оптимального кодування

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення лекції

Структура лекції	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: <i>привітання, визначення присутності студентів на занятті</i>
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: <i>вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми</i>
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	60 хв	Головне місце приділяється <i>викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень. Поточний контроль на тему «Кодування»</i>
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с.302-308	5 хв	Включає в себе: <i>узагальнення, теоретичні і фактичні висновки, закріплення вивченого на лекції матеріалу</i>

Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст]/ Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

Навчальні матеріали лекції

Оптимальним кодуванням називають процедуру перетворення символів первинного алфавіту А на кодові комбінації вторинного алфавіту В, при якій середня довжина повідомлення у вторинному алфавіті мінімальна.

Знайти код, який був би оптимальним з усіх точок зору практично неможливо. Код може бути оптимальним лише за певних умов (з точки зору швидкості передачі інформації, здатності виправляти помилки тощо).

Проста ідея побудови коду, близького до оптимального, належить американському математику Фано.

Нехай заданий алфавіт $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ і розподіл ймовірностей $P = (p_1, \dots, p_r)$ появи букв у повідомленні. Тут p_i ймовірність появи букви a_i , $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$.

Сформулюємо алгоритм за методом Фано.

1. Упорядкуємо букви алфавіту A за спаданням ймовірностей їхньої появи в повідомленні

2. Розбиваємо множину букв, записаних у вказаному порядку, на дві послідовні частини так, щоб сумарні ймовірності кожної з них були якомога ближчі одна до одної. Кожній букві з першої частини припустимо символ 0, другої - символ 1. Далі так само чинять із кожною частиною, якщо вона містить принаймні дві букви. Процесу продовжуємо доти, доки вся множина не буде розбита на окремі букви.

Для кожної роздільної схеми алфавітного кодування σ математичне сподівання коефіцієнта збільшення довжини повідомлення в разі кодування (позначають $\bar{l}_\sigma$) визначають так:

$$l_\sigma(P) = \sum_{i=1}^r p_i l_i, \text{ де } l_i = (\beta_i)$$

і називають *середньою довжиною* кодування σ для розподілу ймовірностей P .

Приклад. Нехай заданий розподіл ймовірностей $P = (0.4, 0.15, 0.15, 0.15)$. Побудуємо код за методом Фаню. Розв'язок подано в табл.

Середня довжина коду дорівнює

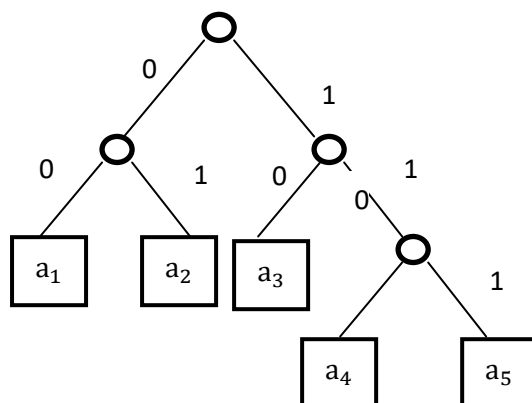
$$\bar{l}_F = 0.4 * 2 + 0.15 * 2 + 0.15 * 2 + 0.15 * 3 + 0.15 * 3 = 2.3,$$

де індекс F означає, що код отриманий за методом Фано.

Букви алфавіту A	Імовірності появи букв	Розбиття множини букв			Елементарні коди
a1	0.4	0	0		00
a2	0.15,		1		01
a3	0.15,	1	0		10
a4	0.15,		1	0	110
a5	0.15,			1	111

Алгоритм Фано має просту інтеграцію за допомогою бінарного дерева. Від кореня відходить два ребра, одне з яких позначене символом 0, друге – символом 1. Ці два ребра відповідають розбиттю множини всіх букв на дві майже рівноймовірні частини, одні з яких ставляють символ 0, а другі – символ 1. Ребра, що виходять із вершини наступного рівня, відповідають розбиттю отриманих частин знову на дві майже рівноймовірні послідовні частини. Цей процес продовжують до моменту, коли множина букв буде розбита на окремі букви. Кожний листок дерева відповідає деякому елементарному коду. Щоб записати цей код потрібно пройти простий шлях від кореня до відповідного листка.

Зазначимо, що незалежно від способу кодування кожному бінарному дереву відповідає набір двійкових елементарних кодів. У такому разі дерево називають *кодовим*. Якщо елементарні коди відповідають листкам кодового дерева, то відповідна схема алфавітного кодування є префіксною (отже, забезпечується однозначність декодування).



Грунтуючись на алгоритмі Хаффмана, можна безпосередньо побудувати кодове дерево оптимального коду. Це дерево називають *деревом Хаффмана*.

За алгоритмом Хаффмана бінарне дерево яке відповідає оптимальному коду, будують знизу вгору, починаючи з $|A|=r$ листків, у цьому разі виконують $r-1$ злиття. Злиття полягає в побудові нового дерева із двох наявних дерев(або листків) з найменшими ймовірностями. Причому листок або дерева з більшою ймовірністю - ліве піддерево, а сума ймовірностей лівого й правого піддерев дорівнює ймовірності отриманого дерева(її записують у корінь). Поміщають 0 на ребро до лівого піддерев, а 1 - на ребро до правого піддерев. Список імовірностей перед кожним злиттям упорядковують за спаданням.

Алгоритм Хаффмана належить до жадібних алгоритмів.

Приклад. Побудуємо дерево Хаффмана для розподілу ймовірностей $P=(0.34, 0.18, 0.17, 0.16, 0.15)$.

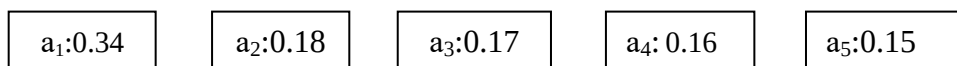
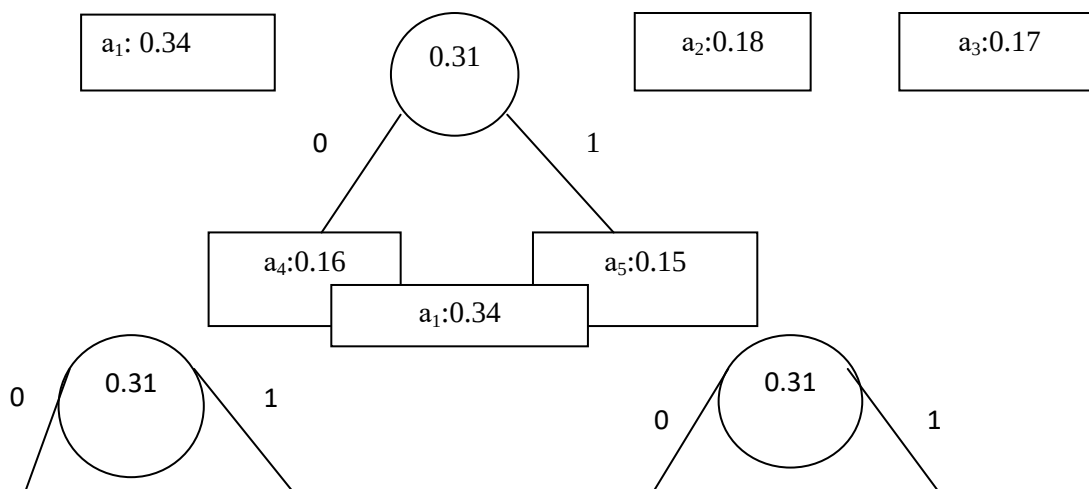


Рис. 7.3



$a_2:0.18$

$a_3:0.17$

$a_4:0.16$

$a_5:0.15$

б

Питання та завдання до контролю знань студентів

1 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції

Що називають оптимальним кодуванням?

Алгоритм кодування методом Фано.

Кодування за алгоритмом Хаффмана.

Лекція

з навчальної дисципліни Дискретна математика

Тема Коди, стійки до перешкод. Коди Хемінга

Мета Сформувати уявлення про коди, які стійкі до перешкод і уявлення про один із головних методів кодування – коди Хемінга

Матеріально-технічне забезпечення та дидактичні засоби, ТЗН

Опорний конспект

Час – 2 години

План проведення заняття

Структура заняття	Відведений час	Методичні вказівки
1 Організаційна частина	5 хв	Включає в себе: привітання, визначення присутності студентів на занятті
2. Актуалізація опорних знань, перевірка вивченого матеріалу та мотивація навчальної діяльності студентів	10 хв	Включає в себе: вступне зауваження, мотивацію актуальності теми, перевірку попереднього матеріалу, формулювання мети лекції, огляд головних питань теми
3 Основна частина (викладення навчальних питань лекції)	55 хв	Головне місце приділяється викладенню основного змісту матеріалу теми, його аналізу, узагальненню висунутих положень.
4 Заключна частина Домашнє завдання: [3], с.316-324	5 хв	Включає в себе: захист студентами звітів про роботу; підведення підсумків, узагальнення матеріалу видача завдання для самостійної роботи; прибирання робочих місць

Література

3 Нікольський Ю.В., Пасічник В.В. Дискретна математика: підручник [Текст]/ Ю.В.Нікольський, В.В. Пасічник – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 608 с.

Навчальні матеріали заняття

У процесі зберігання даних і передачі інформації з мереж зв'язку неминуче виникають помилки. Контроль цілісності даних і виправлення помилок - важливі завдання на багатьох рівнях роботи з інформацією (зокрема, фізичному, каналному, транспортному рівнях мережевої моделі).

У системах зв'язку можливі кілька стратегій боротьби з помилками:

Виявлення помилок у блоках даних і автоматичний запит повторної передачі пошкоджених блоків - цей підхід застосовується, в основному, на каналному і транспортному рівнях;

Виявлення помилок у блоках даних і відкидання пошкоджених блоків - такий підхід іноді застосовується в системах потокового мультимедіа, де не повинно бути затримки передачі і немає часу на повторну передачу;

Виправлення помилок (англ. forward error correction) застосовується на фізичному рівні.

Перешкодостійкі коди – один з найбільш ефективних засобів забезпечення високої вірогідності передачі дискретної інформації. Історія розвитку перешкодостійкого кодування почалась 1984 р. публікацією знаменитої статті Клода Шенонна, у якій він сформулював теорему для випадку передачі дискретної інформації з каналу із перешкодами, яка стверджує, що ймовірність помилкового декодування прийнятих сигналів може бути як завгодно малою шляхом вибору відповідного способу кодування сигналів..

Перешкодостійке кодування – кодування, що дозволяють виявляти або виправляти помилки при передачі інформації, що виникають у результаті впливу перешкод.

Перешкодостійкий код – код отриманий за допомогою цього кодування з вхідної інформації. Перешкодостійке кодування забезпечуються за рахунок уведення надмірності в кодові комбінації, тобто за рахунок того, що не всі символи в кодових комбінаціях використовуються для передачі інформації.

Коди Хеммінга є одними з найпоширеніших системних кодів, які виправляють помилки. Вони є кодами з мінімальною кодовою відстанню $d_{min} = 3$. Формування r інформаційними елементами у комбінаціях даних кодів виконують за k інформаційними елементами і тому довжина кодової комбінації в них дорівнює $n = k + r$.

При передачі кодового повідомлення може бути спотворений будь-який елемент, кількість таких ситуацій $C_m^1 = n$. До цього слід додати ще одну ситуацію, коли помилка не виникає. Таким чином, загальна кількість 2^r комбінацій перевірних елементів має перевищувати кількість можливих помилок ситуацій в коді з урахуванням відсутності для правильного розрізнення їх і визначення місць помилки $2^r \geq n + 1$.

Оскільки $2^n = 2^{k+r} = 2^k * 2^r$, то можна записати

$$2^n \geq (n + 1) * 2^k, \quad (1)$$

де 2^n – повна кількість комбінацій коду.

Мінімальне співвідношення коректувальних та інформаційних розрядів, нижче якого код не може зберігати задані коректувальні властивості, визначають виразом $2^r - 1 = n$.

Для розрахунку основних параметрів коду Хеммінга можна задати кількість перевірених елементів r . Тоді з виразу (1) визначають n , а кількість інформації елементів дорівнює $k = n - r$.

Співвідношення між r , n , і k для кодів Хеммінга наведено в табл. 1

Таблиця 1

k	1	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11
r	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5
n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Для обчислення значень синдрому Хеммінга запропонував розташувати стовпчики так, щоб номер i -го стовпчика первинної матриці $H(n,r)$ і номер розряду кодової комбінації відповідали двійковому поданню числа i . Тоді синдром, знайдений з перевірених рівнянь, буде двійковим поданням номера розряду кодової комбінації, в якій виникла помилка. Для цього перевірені розряди мають знаходитись на номерах позицій, які подаються степенем двійки $(2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{r-1})$ тому, що кожний з них входить тільки до одного з перевірених рівнянь. Таким чином, якщо нумерувати зліва на право, то контрольні символи повинні знаходитися на першій, другій, четвертих позиціях і т.д.

Результат першої перевірки дає цифру молодшого розряду синдрому в двійковому запису. Якщо результат цієї перевірки дасть "1", то один із символів перевіркової групи спотворений. Таким чином, першою перевіркою повинні бути охоплені символи з номерами, які містять у двійковому запису одиниці в першому розряді

(1,3,5,7,9,11,13,15,...)

$$S_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9 \oplus a_{11} \oplus a_{13} \oplus a_{15} \oplus \dots$$

Результат другої перевірки дає цифру другого розряду синдрому. Тому другою перевіркою повинні бути охоплені символи з номерами, які є в двійковому запису одиниці в другому розряді (2,3,6,7,10,11,14,15,...)

$$S_2 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \oplus \dots$$

Аналогічно, при третій перевірці повинні перевіряти символи, номери яких в двійковому запису мають одиниці в третьому розряді (4,5,6,7,12,13,14,15 і т.д.)

$$S_3 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \oplus \dots$$

Таким чином, система рівнянь для визначення синдрому корекції помилки при кодуванні 2048 повідомлень кодом Хеммінга матиме вигляд

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9 \oplus a_{11} \oplus a_{13} \oplus a_{15} \oplus \dots \\ S_2 &= a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \oplus \dots \\ S_3 &= a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \oplus \dots \\ S_4 &= a_8 \oplus a_9 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \oplus \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ці суми в рівняннях при правильній передачі повідомлень є завжди парними, а при виникненні помилки – непарними.

Перевірена матриця $H_{15,1}$ коду Хеммінга для випадку приведеної системи рівнянь визначення синдрому має наступний вигляд

$$H_{15,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Питання та завдання до контролю знань студентів

- 1 Для актуалізації опорних знань та перевірки попереднього матеріалу
Методи кодування?
- 2 Для узагальнення та перевірки засвоєного матеріалу на лекції
Визначення кодів, стійких до перешкод?
Визначення кодів Хемінга?